

Особенности решения задач 12 типа ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Подготовила: учитель математики

МБОУ лицея №3

Л.В. Вагнер

Задание №12

(профильный уровень)

Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований	Коды проверяемых умений	Уровень сложности	Максимальный балл	Время выполнения
Уметь решать уравнения и неравенства	2.1-2.3	2.1, 2.2	II повышенный	2 балла	20 мин (базовый уровень) 10 мин (профильный уровень)

Перечень проверяемых требований

Код контролируемого требования	Требования к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
	Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	ФГОС СОО	
		базовый уровень	углублённый уровень
2	Уметь решать уравнения и неравенства:		
2.1	решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем	– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать
2.2	решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций		
	и их графиков; использовать для приближённого решения уравнений и неравенств графический метод		теоремы и находить нестандартные способы решения задач;
2.3	решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы		– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат

Перечень проверяемых умений

2	УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА		
2.1	Уравнения		
2.1.1	Квадратные уравнения	Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем	Решение задач с использованием свойств степеней и корней, многочленов, преобразований многочленов и дробно-рациональных выражений
2.1.2	Рациональные уравнения	Решение задач с использованием свойств степеней и корней, многочленов, преобразований многочленов и дробно-рациональных выражений	
2.1.3	Иррациональные уравнения		
2.1.4	Тригонометрические уравнения	Решение тригонометрических уравнений	Тригонометрические уравнения. Однородные тригонометрические уравнения
2.1.5	Показательные уравнения	Простейшие показательные уравнения и неравенства	Простейшие показательные уравнения и неравенства
2.1.6	Логарифмические уравнения	Логарифмические уравнения и неравенства	Логарифмические уравнения и неравенства
2.1.7	Равносильность уравнений, систем уравнений	Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем	Решение задач на движение и совместную работу, смеси и сплавы с помощью линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений и их систем
2.1.8	Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными		
2.1.9	Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных		



Перечень проверяемых умений

Код раз дела	Код контроли руемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	углублённый уровень
	2.1.10	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений	Графическое решение уравнений и неравенств	Графическое решение уравнений и неравенств
	2.1.11	Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем		
	2.1.12	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем. Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков. Решение задач с использованием числовых функций и их графиков	Решение задач на движение и совместную работу, смеси и сплавы с помощью линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений и их систем. Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков. Решение задач с использованием числовых функций и их графиков

Перечень проверяемых умений

2.2	Неравенства			
	2.2.1	Квадратные неравенства	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков
	2.2.2	Рациональные неравенства		
	2.2.3	Показательные неравенства	Простейшие показательные уравнения и неравенства	Простейшие показательные уравнения и неравенства
	2.2.4	Логарифмические неравенства	Логарифмические уравнения и неравенства	Логарифмические уравнения и неравенства

Перечень проверяемых умений

Кодификатор ЕГЭ 2023 г.

МАТЕМАТИКА, 11 класс. 14 / 22

Код раз дела	Код контролируемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	углублённый уровень
	2.2.5	Системы линейных неравенств	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков
	2.2.6	Системы неравенств с одной переменной		Использование неравенств и систем неравенств с одной переменной, числовых промежутков, их объединений и пересечений
	2.2.7	Равносильность неравенств, систем неравенств		
	2.2.8	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств	Графическое решение уравнений и неравенств	Графические методы решения уравнений и неравенств
	2.2.9	Метод интервалов	<i>Метод интервалов для решения неравенств</i>	Метод интервалов для решения неравенств
	2.2.10	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем	Графическое решение уравнений и неравенств	Графическое решение уравнений и неравенств

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта a и пункта b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Тригонометрическое уравнение

а) Решите уравнение

$$4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

$$a) 4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$4(1 - \sin^2 x) + 4\sin x - 1 = 0$$

$$4 - 4\sin^2 x + 4\sin x - 1 = 0$$

$$-4\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0$$

$$4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$$

пусть $\sin x = t$, $|t| \leq 1$

тогда $4t^2 - 4t - 3 = 0$

$$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 64$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{8}$$

$$t_1 = -\frac{1}{2} \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

Обратная замена

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

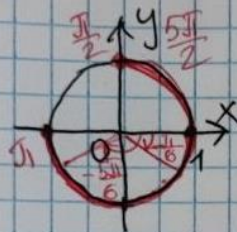
$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{3}{2} \\ \sin x &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \text{не имеет смысла}$$

$$b) -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

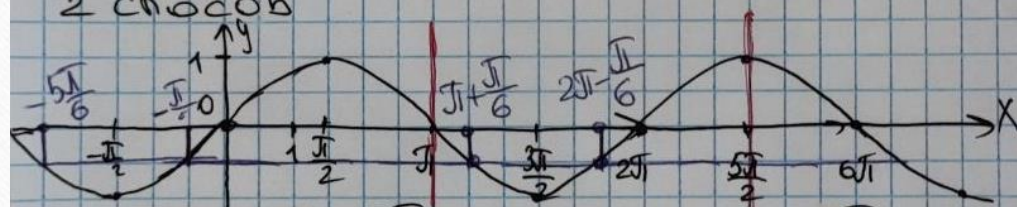
1 способ



$$-\frac{\pi}{6} \notin, -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{6} \notin, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

2 способ



$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

3 способ

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow n=0 \quad -\frac{\pi}{6} \notin$$

$$n=1 \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in$$

$$\rightarrow n=2 \quad -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6} \notin$$

$$\rightarrow m=0 \quad -\frac{5\pi}{6} \notin$$

$$m=1 \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} \in$$

$$\rightarrow m=2 \quad -\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{19\pi}{6} \notin$$

Ответ: а) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}\right]; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

Тригонометрическое уравнение

а) Решите уравнение

$$6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие

отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

ОТВЕТ:

а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}\right\}$

б) $-\frac{19\pi}{6}$

Показательное уравнение

а) Решите уравнение

$$4^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0;$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1; \frac{5}{3}\right)$.

$$a) 4^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0$$

$$\frac{4^x}{4^{\frac{1}{2}}} - \frac{5 \cdot 2^x}{2^1} + 3 = 0$$

$$\frac{4^x}{2} - \frac{5 \cdot 2^x}{2} + 3 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$$

$$(2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0 \quad (2^{2x})^x = (2^x)^2$$

Пусть $2^x = t, t > 0$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Обратная замена

$$t = 2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

$$t = 3$$

$$2^x = 3$$

$$x = \log_2 3$$

$$b) (1; \frac{5}{3}) \quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$x = 1 \notin (1; \frac{5}{3})$$

$$x = \log_2 3$$

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$$

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Представим $\frac{5}{3}$ в виде логарифма с основанием 2

$$\frac{5}{3} = \log_2 2^{\frac{5}{3}}$$

Сравним

$$\log_2 3 < \log_2 2^{\frac{5}{3}}$$

$$2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$$

т.к. $2 > 0$, функция возрастает

$$\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{32} < \sqrt[3]{64}$$

$$3 < \sqrt[3]{32} < 4$$

Следовательно

$$\log_2 3 \in (1; \frac{5}{3})$$

Ответ: а) $1; \log_2 3$
б) $\log_2 3$

Показательное уравнение

а) Решите уравнение

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0;$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

ОТВЕТ:

а) $1; \log_3 5$

б) $\log_3 5$

Логарифмическое уравнение

а) Решите уравнение

$$\log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5x^2 + 1};$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

$$a) \log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_2 \sqrt{5x^2 + 1}$$

$$\log_2(4x^4 + 28) - 2 \log_2 \sqrt{5x^2 + 1} = 2$$

$$\log_2(4x^4 + 28) - \log_2(5x^2 + 1)^2 = 2$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$$

$$4x^4 + 28 > 0$$

$$5x^2 + 1 > 0$$

$$\sqrt{5x^2 + 1} > 0$$

при
любом
x

$$\log_2(4x^4 + 28) - \log_2(5x^2 + 1) = 2$$

$$\log_2 \frac{4x^4 + 28}{5x^2 + 1} = \log_2 4$$

$$\frac{4x^4 + 28}{5x^2 + 1} = 4$$

$$(5x^2 + 1) \cdot 4 = 4x^4 + 28$$

$$4x^4 - 20x^2 + 24 = 0 \quad | :4$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$\text{Пусть } x^2 = t, t \geq 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_1 = 2; t_2 = 3$$

Обратная замена

$$t_1 = 2$$

$$x^2 = 2$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$$

$$t_2 = 3$$

$$x^2 = 3$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$$

$$b) \left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right] \quad [-1,8; 1,4]$$

$$1) \sqrt{2} \geq 1,4 \Rightarrow \sqrt{2} \notin$$

$$\sqrt{1,96} < \sqrt{2}$$

$$1,4 < \sqrt{2}$$

$$2) -\sqrt{2}$$

$$-1,5 < -\sqrt{2} < -1,4$$

$$-\sqrt{2} \in \left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$$

$$3) \sqrt{3} \notin \left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$$

$$\sqrt{2,89} < \sqrt{3}$$

$$1,7 < \sqrt{3}$$

$$4) -\sqrt{3} \in \left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$$

$$-\sqrt{3,24} < -\sqrt{3} < -\sqrt{2,89}$$

$$-1,8 < -\sqrt{3} < -1,7$$

Ответ: a) $\pm \sqrt{2}; \pm \sqrt{3}$

b) $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}$.

Логарифмическое уравнение

а) Решите уравнение

$$\log_3(3x^4 + 42) = 1 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{13x^2 + 2};$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{4}; 2\right]$.

ОТВЕТ:

а) $\pm 1; \pm 2\sqrt{3}$

б) ± 1