Решаем рационально на ЕГЭ. Тип задания по КТ. Неравенство или система неравенств.

Литвиненко Тамара Васильевна, учитель математики МБОУ СОШ №13,

г. Сургут

Решение заданий типа C_3 (№17-2015г).

Комментарий: $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)\cdot g(x))$

ОДЗ: $f(x)>0$, $g(x)>0$ (каждое из выражений положительно)

и $f(x)\cdot g(x) >0$ (каждое из выражений положительно либо каждое из выражений отрицательно);

$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)\cdot g(x))$- область определения правой части и левой части не равносильны;

Переход от $\log_a (f(x)\cdot g(x))$ к $\log_a f(x) + \log_a g(x)$таит множество опасностей: одз переменной сужается и можно потерять решения неравенства.

Рассматривается два случая:

1) $f(x)>0$, $g(x)>0$ (при этом $\log_a (f(x)\cdot g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$);

2) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ (при этом $\log_a (f(x)\cdot g(x))=\log_a (-f(x))+$ $+\log_a (-g(x))$).

При решении неравенства $\log_a (f(x)\cdot g(x))+ \log_a \frac{f(x)}{g(x)} < p(x)$ переходим к равносильной системе $\begin{cases} \log_a f^2(x)<p(x), \\ f(x)\cdot g(x) > 0. \end{cases}$

При решении неравенств, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)=2n \cdot \log_a | f(x)|$, если не поставить знак модуля,то можно потерять решения соответствующего неравенства.

<u>Например</u>: при решении неравенства $\log_5 f^2(x)>2$ переход к неравенству $2 \log_5 f(x)>2$ будет означать потерю решений; правильным будет переход к неравенству $2 \log_5 |f(x)|>2$ или сразу к неравенству $f^2(x)>5^2$.

Решение логарифмических неравенств с переменным основанием

Способы решения:

1) традиционный, при котором рассматриваются два случая (основание больше 1, основание положительно и меньше1);

2) применение методов интервалов;

3) способ основан на следующих простых утверждениях.

Утверждение 1.Если числа p и q одного знака (то есть $p \cdot q > 0$), то и числа pr и qr ($r \neq 0$) – одного знака; обратно, если числа pr и qr ($r \neq 0$) – одного знака, то и числа p и q одного знака.

Утверждение 2. Если $a > 0$, $b > 1$, то числа $\log_b a$ и $a-1$ – одного знака.

Эти утверждения позволяют при решении логарифмических неравенств вида $r(x) \cdot \log_{e(x)} a(x) > 0$ переходить сначала к неравенству $r(x) \cdot \dfrac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)} > 0$ (где b – любое число, большее 1)

Затем пере ходим к неравенству r(x)$\cdot\frac{a(x)-1}{c(x)-1} > 0$.

Таким образом, неравенство $r(x)\cdot\frac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)} > 0$ равносильно системе $\begin{cases} r(x)\cdot\frac{a(x)-1}{c(x)-1} > 0, \\ a(x) > 0, \\ c(x) > 0. \end{cases}$ При необходимости такой переход можно сделать несколько раз.

Утверждение 3. Если a > 0, b > 0, c > 1, то числа $\log_c a - \log_c b$ и a – b – одного знака.

К методу знакотождественных множителей, кроме указанных пар можно отнести следующие:

а) |a| - |b|и $a^2 - b^2$, $\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}$ и a – b(при условиях a$\geq$0 и b$>$ 0).

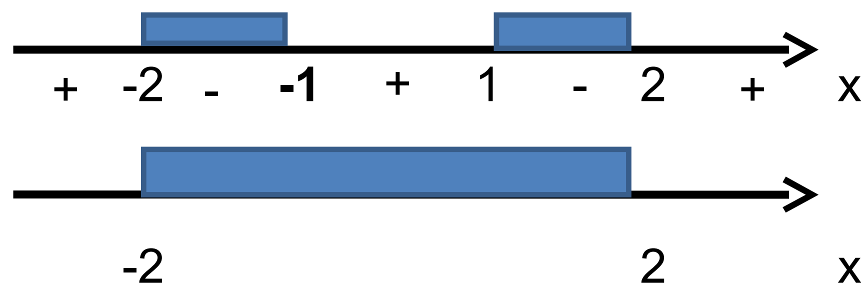
б) $\sqrt[2n+1]{a}$ - $\sqrt[2n+1]{b}$ a – b, $\sqrt[2n+1]{a}$ + $\sqrt[2n+1]{b}$ a + b,

l^a - l^b a – b (при условии l>1).

<u>Пример:</u> $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leq 0$

Решение. $\dfrac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\dfrac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)} \leq 0$; $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)} \leq 0, \\ -2 < x > 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0, \\ -2 < x > 2. \end{cases}$



Ответ: (-2; –1] ∪ (1; 2).

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x}\dfrac{x+3}{(x-7)^8} \geq -8, \\ x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+3x-24}{x-8} \leq 3. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы, представив его левую часть в виде разности логарифмов:

$\log_{7-x}(x+3) - \log_{7-x}(x-7)^8 \geq -8$. Далее, используя свойства чётной степени, получим: $\log_{7-x}(x+3) - \log_{7-x}(7-x)^8 \geq -8$, откуда

$\log_{7-x}(x+3) - 8 \geq -8$, $\log_{7-x}(x+3) \geq 0$.

Рассмотрим два случая.

<u>1-й случай</u>: $0 < 7 - X < 1$. В этом случае получим систему $\begin{cases} 0 < x+3 \leq 1, \\ 0 < 7-x < 1, \end{cases}$ которая не имеет решений.

<u>2-й случай</u>: $7 - x > 1$. В этом случае получим систему $\begin{cases} x+3 \geq 1, \\ 7-x > 1, \end{cases}$ $-2 \leq x < 6$.

Заметим, что применение метода знакотождественных множителей позволяет, заменив $\log_{7-x}(x+3)$ на $\frac{\lg(x+3)}{\lg(7-x)}$, сразу перейти к равносильной неравенству $\log_{7-x}(x+3) \geq 0$ системе

$\begin{cases} \frac{x+3-1}{7-x-1} \geq 0, \\ x+3 > 0, \\ 7-X > 0, \end{cases}$ откуда следует система $\begin{cases} (x+2)(X-6) \leq 0, x \neq 6, \\ x+3 > 0, \\ x-7 < 0, \end{cases}$

решением которой будет тот же промежуток $[-2\,;6)$, являющийся и решением первого неравенства данной системы.

2. Решим второе неравенство системы, перенеся 3 из правой части неравенства в левую и вычтя её из дроби:

$x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2}{x-8} \leq 0, \qquad \frac{x^4-2x^3-8x^2}{x-8} \leq 0, \ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8} \leq 0.$

Решение второго неравенства данной системы : (-∞; $-2] \cup \{0\} \cup [4;8)$.

3. Решение данной системы неравенств:

$\begin{cases} [-2\,;6), \\ (-\infty;\ -2] \cup \{0\} \cup [4;8), \end{cases} \qquad \{-2;\ 0\} \cup [4;6).$

Ответ: $\{-2;\ 0\} \cup [4;6)$.

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7^{x-1} + \ 7^{x} + 7^{x+1} > 171, \\ \log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \le \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right). \end{cases}$$

Решение. Т.к.

b$> 0, c > 0\ , a > 1,$ то справедлива равносильность:

$\log_a b + \log_a c \le \log_a d \leftrightarrow$ bc$\le d$.

Тогда получим $\begin{cases} 7^{x-1}(1 + 7 + 7^2) > 171, \\ \frac{x^2+3x-9}{x} \le x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10, \\ x > 0, x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 7^{x-1} > 3, \\ \frac{x^2+3x-9}{x} \le \frac{x^3+3x^2-10x+1}{x}\ , \\ x > 0, \ \ x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 > \log_7 3, \\ x^3 + 2x^2 - 13x + 10 \ge 0, \\ x > 0, x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases}$$

В правой части второго неравенства разложим многочлен третьей степени на множители:
$x^3 + 2x^2$-13x+10=(x+5)($x^2 - 3x + 2$)=(x+5)(x-1)(x-2),

$$\begin{cases} x > 1 + \log_7 3, \\ (x+5)(x-1)(x-2) \geq 0, \\ x > 0, x^2 + 3x - 9 > 0, \end{cases}$$ т.к. x> 1, то $$\begin{cases} x > 1 + \log_7 3, \\ x - 2 \geq 0, \\ x > \frac{-3+\sqrt{45}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 + \log_7 3, \\ x \geq 2; \end{cases}$$ x≥ 2. Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0, \\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{57}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство: $25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0$;

$(\frac{25}{4})^x + 3(\frac{5}{2})^x - 4 > 0$. Пусть $t = (\frac{5}{2})^x$, где $t > 0$. Получим $t^2 + 3t - 4 > 0$,

$t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = -4$, $t_2 = 1$, решая неравенство $(t-1)(t+4) > 0$ методом интервалов получим $t > 1$, $t < -4$. Вернёмся к замене $(\frac{5}{2})^x > 1$, следовательно $\mathbf{x > 0}$.

Осталось найти положительные решения второго неравенства:
x^2-12|x|+37=$(|x|-6)^2$+1≥ 1.

При положительных значениях переменной справедливы неравенства

1- $\frac{x^2}{37} < 1$ и 1+$\frac{x^2}{37} > 1$, а значит, $\log_{1-\frac{x^2}{37}}$(x^2-12|x|+37)≤ 0 и

$\log_{1+\frac{x^2}{37}}$(x^2-12|x|+37)≥ 0.

Тем самым, неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба выражения равны нулю. Следовательно, x^2-12|x|+37=1, тогда $(|x|-6)^2$+1=1, $(|x|-6)^2$=0, |x|=6, x=6 или x=-6.

Отрицательное решение неравенства не является решением системы.

Ответ: {6}.