Фоксфорд

Сборник задач для подготовки к олимпиадам по математике

5-11 классы

от преподавателей Фоксфорда

Предисловие

Дорогой читатель!

Этот мини-сборник состоит из избранных задач онлайн-олимпиады Фоксфорда по математике в 2016/2017 учебном году (IV, V и VI сезоны).

Задачи разбиты по разделам:

1) логика, 2) алгебра, 3) геометрия,

4) комбинаторика, 5) теория чисел.

Это разбиение соответствует тематике задач и нужным для их решения знаниям.

Внутри каждого раздела задачи упорядочены по сложности:

- 5 и 6 классам рекомендуются задачи под номерами 1 и 2;
- 7 классам рекомендуются задачи под номерами 2 и 3;
- 8 и 9 классам рекомендуются задачи под номерами 3 и 4;
- 10 и 11 классам рекомендуются задачи под номерами 4 и 5.

При подготовке к олимпиадам следует уделять внимание в первую очередь сильным сторонам. Для того, чтобы стать призёром, обычно достаточно решить 60% варианта. Добившись практически абсолютной результативности в наиболее интересных разделах, можно переходить к изучению всех остальных разделов и тренировке по ним. Однако необходимо обладать достаточно широкой эрудицией, чтобы не упустить задачи, которые находятся на стыках разделов.

Составлением олимпиады Фоксфорда по математике в 2016/2017 учебном году занимались преподаватели–методисты Блинков Ю.А., Голубев М.О., Максимов Д.В., Нилов Ф.К., Сегинёва М.С., Трушин Б.В. под моей редакцией.

Шарич В.З.,

зав. каф. математики Фоксфорда

Список задач со ссылками

	Логика	Алгебра	Геометрия	Комбинаторика	Теория чисел
1	Турнир по теннису Ссылка	Детская площадка Ссылка	Расстояния на прямой Ссылка	Сколько же всё-таки чисел? Ссылка	Сотни-тысячи Ссылка
2	Рыцари и лжецы в ряд Ссылка	Бизнесмен и тракторист Ссылка	Буриданова лягушка Ссылка	Бардак на олимпиаде Ссылка	Сумма делится, а слагаемые нет Ссылка
3	Разбираем камни с кучки Ссылка	Суммы трёх Ссылка	Шесть пирамид в кубе Ссылка	Конференция Ссылка	Особенные числа подряд Ссылка
4	АБсчитались Ссылка	Наименьшее значение $a^2 - 4b$ Ссылка	Параллельные через основания биссектрис Ссылка	Почти пустые линии Ссылка	Сократить дробь Ссылка
5	Голодный, но принципиальный Ссылка	Многократно больше среднего Ссылка	Площади в прямоугольном тетраэдре Ссылка	Раздаём котят Ссылка	Делимость суммы степеней Ссылка

В каждой задаче есть варианты (обычно 5 равноценных по сложности вариантов). В условии задачи некоторые параметры заменены латинскими буквами (X, Y, Z, N, M, ...), а сами варианты приведены в таблице после условия задачи.

На олимпиаде Фоксфорда каждый участник получает 10 задач с индивидуальным набором параметров и, таким образом, решает уникальный вариант олимпиады.

Логика

Задачи по логике характерны отсутвием привязок к определённым математическим объектам.

Для решения логических задач на олимпиадах, на самом деле, не нужны особые знания. Тем не менее полезно знакомство со следующими темами:

- оценка + пример
- логические задачи;
- теория игр;
- и др.

Задача Л-1
Турнир по теннису

В турнире по настольному теннису участвовало восемь школьников. Ребята поделились на пары и сыграли четыре матча. Затем победители этих матчей опять поделились на пары и сыграли еще два матча. В итоге победители этих матчей сыграли матч между собой, а тот, кто его выиграл, стал победителем турнира. Победители этих семи матчей (в некотором порядке) – это Z. Кто выиграл турнир?

Варианты	Z	Ответ
I	Вася, Аня, Миша, Аня, Толя, Миша, Аня	Аня
II	Катя, Толя, Ира, Толя, Слава, Ира, Толя	Толя
III	Вера, Федя, Милена, Петя, Вера, Федя, Вера	Вера
IV	Костя, Поля, Костя, Наташа, Наташа, Соня, Наташа	Наташа
V	Дима, Лена, Дима, Алина, Дима, Алина, Света	Дима

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Л-2
Рыцари и лжецы в ряд

На острове живут только лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Однажды выстроились в один ряд X жителей этого острова. Каждый, кроме трёх самых крайних справа, сказал: «Мой сосед справа – лжец». Самый правый сказал: «Мой сосед слева – балда», а тот возмутился: «Я не балда!» Сколько лжецов в строю?

Варианты	X	Ответ
I	20	10
II	12	6
III	14	7
IV	16	8
V	18	9

Вернуться к таблице с задачами

Задача Л-3
Разбираем камни с кучки

В кучке имеется $n > 1$ камней. Двое по очереди берут камни из этой кучки: минимум X и максимум Y камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каком наименьшем $n > Z$ у второго игрока есть выигрышная стратегия?

Варианты	X	Y	Z	Ответ
I	7	19	124	130
II	8	14	127	132
III	5	19	118	120
IV	9	19	105	112
V	5	13	105	108

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Л-4
АБсчитались

В ряд выписано несколько букв А и Б. Среди любых подряд выписанных N букв А и Б встречаются поровну раз, а среди любых M букв подряд — не поровну. Какое наибольшее число букв может располагаться в этом ряду?

Варианты	N	M	Ответ
I	100	102	150
II	200	202	300
III	300	302	450
IV	400	402	600
V	500	502	750
Общий	N	$M = N + 2$	$\frac{3}{2} \cdot N$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Л-5
Голодный, но принципиальный

В ряд стоит N лукошек с малиной: в первом одна ягода, во втором две, в третьем три и так далее. Время от времени является мистер Фокс и съедает одно и то же число ягод из нескольких лукошек (разумеется, в каждом ягод должно быть не меньше числа, которое выбрал мистер Фокс). За какое наименьшее число визитов мистер Фокс съест всю малину?

Варианты	N	Ответ
I	100	7
II	300	9
III	150	8
IV	600	10
V	50	6
Общий	N	$\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Алгебра

Задачи по алгебре характерны привязками к выражениям, функциям, уравнениям, неравенствам или их системам.

Для решения алгебраических задач на олимпиадах необходимо твёрдое владение школьным курсом своего и всех предыдущих классов. Кроме того, полезно знакомство со следующими темами:

- многочлены и их корни;
- доказательство неравенств;
- функциональные уравнения;
- и др.

Задача А-1
Детская площадка

На детской площадке катались дети на двухколёсных и трехколёсных велосипедах. Сколько трёхколесных велосипедов было на площадке, если всего было X и Y?

Варианты	X	Y	Ответ
I	52 колеса	22 велосипеда	8
II	60 колёс	25 велосипедов	10
III	61 колесо	28 велосипедов	5
IV	65 колёс	29 велосипедов	7
V	75 колёс	31 велосипед	13

Вернуться к таблице с задачами

Задача А-2
Бизнесмен и тракторист

Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Фокса сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Фокс выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать X. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Форд, обогнать которого не было никакой возможности. После того как Фокс проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать Y. Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста?

Варианты	X	Y	ответ
I	1 час	2 часа	5 часов
II	2 часа	4 часа	10 часов
III	3 часа	6 часов	15 часов
IV	12 минут	24 минуты	1 час
V	24 минуты	48 минут	2 часа

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача А-3
Суммы трёх

Известно, что $a + b + c = m$, а

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = n.$$

Найдите сумму

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Варианты	m	n	Ответ
I	7	0,7	1,9
II	8	0,8	3,4
III	8	0,7	2,6
IV	9	0,8	4,2
V	9	0,9	5,1
Обший	m	n	$mn - 3$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача А-4

Наименьшее значение $a^2 - 4b$

Числа a и b таковы, что

$$a + b \le X, \qquad 2a + b \le Y.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $a^2 - 4b$?

Варианты	X	Y	Ответ
I	-4	-7	13
II	-5	-8	17
III	-6	-9	21
IV	-7	-10	25
V	-8	-11	29
Общий	$X = -k - 1$	$Y = -k - 4$	$4k + 1$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача А-5
Многократно больше среднего

Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_X$. Оказалось, что a_k в Y раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k?

Варианты	X	Y	ответ
I	2014	19	1910
II	2015	13	1862
III	2016	24	1934
IV	2024	22	1934
V	2023	17	1906
Общий	$X = mn$	$Y = n$	$m(n-1)+2$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Геометрия

Задачи по геометрии характерны привязками к фигурам на плоскости или в пространстве объектам.

Для решения геометрических задач на олимпиадах необходимо твёрдое владение школьным курсом своего и всех предыдущих классов. Кроме того, полезно знакомство со следующими темами:

- степень точки;
- теоремы Чевы и Менелая;
- преобразования плоскости (подобия, движения, гомотетия, инверсия);
- и др.

Задача Г-1

Расстояния на прямой

На прямой расположены 100 точек. Сумма расстояний от первой слева из них до всех остальных равна a, а сумма расстояний от второй слева до всех остальных (включая самую левую) равна b. Чему равно расстояние между первой и второй точками слева?

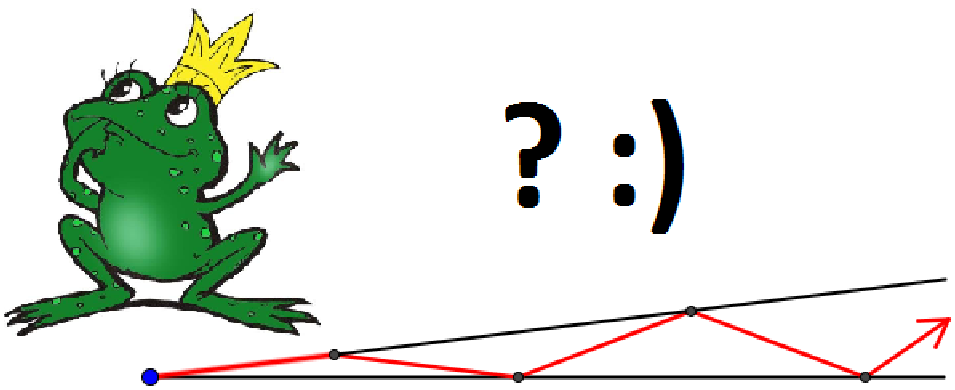
Варианты	a	b	Ответ
I	2016	1918	1
II	2016	1820	2
III	2016	1722	3
IV	2018	1822	2
V	2017	1625	4

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Г-2
Буриданова лягушка

В вершине угла в X° сидит лягушка. Она делает прыжки равной длины, каждый раз перемещаясь с одной стороны угла на другую и не возвращаясь в точки, где уже побывала до этого. Какое наибольшее число прыжков может сделать лягушка?



Варианты	X	Ответ
I	1	90
II	2	45
III	3	30
IV	5	18
V	9	10
Общий	X	$90/X$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Г-3
Шесть пирамид в кубе

Куб поделен на шесть четырехугольных пирамид следующим способом: внутри куба выбрана точка, которая соединена со всеми восемью вершинами куба. Объемы пяти из этих пирамид — это числа a, b, c, d и e. Чему равен объем шестой пирамиды?

Варианты	a	b	c	d	e	Ответ
I	2	5	10	11	14	6
II	5	6	7	9	11	10
III	5	6	8	14	17	16
IV	2	5	7	8	13	10
V	6	9	10	13	15	4

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

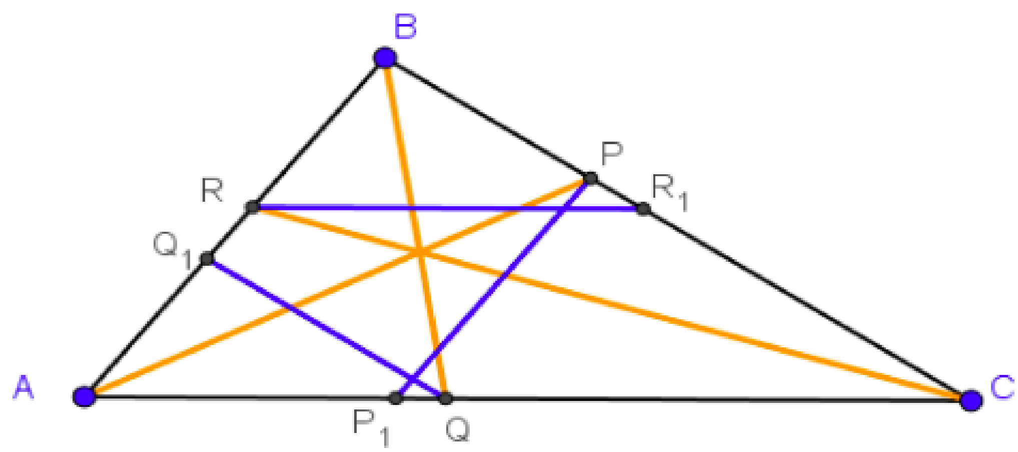
Задача Г-4

Параллельные через основания биссектрис

Пусть P, Q и R – точки пересечения биссектрис углов треугольника ABC со сторонами BC, CA и AB соответственно. Прямая, проходящая через точку P параллельно AB, пересекает сторону CA в точке P_1. Аналогично определяются точки Q_1 и R_1. Найдите сумму

$$\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{QQ_1}+\frac{1}{RR_1},$$

если длины сторон исходного треугольника равны a, b и c.



Варианты	a	b	c	Ответ
I	2	4	5	1,9
II	4	8	10	0,95
III	8	16	20	0,475
IV	10	20	25	0,38
V	20	40	50	0,19
Общий	a	b	c	$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Г-5
Площади в прямоугольном тетраэдре

В тетраэдре $SABC$ углы $\angle ASB, \angle BSC, \angle CSA$ прямые. Точка H – основание высоты из вершины S на грань ABC. Оказалось, что площадь треугольника AHB в X раз больше площади треугольника BHC. Найдите отношение площадей треугольников ASB и BSC. (*В ответе запишите результат деления площади треугольника ASB на площадь треугольника BSC; при необходимости округлите до сотых.*)

Варианты	X	Ответ
I	9	3
II	16	4
III	25	5
IV	36	6
V	49	7
Общий	n^2	n

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Комбинаторика

Задачи по комбинаторике характерны привязками к определённым дискретным конструкциям, как-то: конечные множества и их подмножества, доски и таблицы, графы.

Для решения комбинаторных задач на олимпиадах полезно знакомство со следующими темами:

- число сочетаний;
- подсчёт двумя способами;
- теория графов;
- и др.

Задача К-1
Сколько же всё-таки чисел?

Сколько существует таких натуральных чисел A, что среди чисел A, $A+X$ и $A+Y$ ровно два четырёхзначных?

Варианты	X	Y	Ответ
I	10	20	20
II	12	24	24
III	14	28	28
IV	15	30	30
V	16	32	32
Общий	X	$Y = 2X$	$2X$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача K-2
Бардак на олимпиаде

В варианте олимпиады X задач, каждая оценивается в 8 баллов (за задачу можно получить целое число от 0 до 8 баллов). По результатам проверки все участники набрали разное число баллов. Члены оргкомитета втихаря исправили оценки 0 на 6, 1 на 7, 2 на 8. В результате этого участники упорядочились в точности в обратном порядке. Какое наибольшее количество участников могло быть?

Варианты	X	Ответ
I	6	7
II	7	8
III	8	9
IV	9	10
V	10	11

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача К-3
Конференция

На конференцию съехались учёные из Франции, Германии и России, всего 20 человек. Оказалось, что на французском языке говорят X человек, немецком – Y, русском – Z. Сколько из них заведомо говорит на всех трёх языках? (Приведите наименьшее возможное количество.)

Варианты	X	Y	Z	Ответ
I	17	16	15	8
II	13	10	19	2
III	15	18	14	7
IV	11	19	16	6
V	10	17	18	5

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача К-4

Почти пустые линии

На доске $N \times N$ стоят фишки. Ряд (строку или столбец) назовем «почти пустым» если в нем не более двух фишек. Оказалось, что каждая фишка стоит в почти пустой строке или в почти пустом столбце. Какое наибольшее количество фишек может быть на доске?

Варианты	N	Ответ
I	20	72
II	30	112
III	40	152
IV	50	192
V	25	92
Общий	N	$4(N-2)$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача К-5
Раздаём котят

Сколькими способами m котят (а котята все разные) можно раздать n семьям (и семьи все разные), если каждой семье нужно выдать одного или двух котят?

Варианты	m	n	Ответ
I	10	6	3402000
II	9	7	1905120
III	10	7	15876000
IV	9	6	907200
V	8	6	151200
Общий	m	n	$\dfrac{m!n!}{(m-n)!(2n-m)!2^{m-n}}$

Вернуться к таблице с задачами

Теория чисел

Задачи по теории чисел характерны привязками к целым числам и отношению делимости.

Для решения теоретико-числовых задач на олимпиадах необходимо твёрдое владение школьным курсом своего и всех предыдущих классов. Кроме того, полезно знакомство со следующими темами:

- сравнения по модулю;
- диофантовы уравнения;
- и др.

Задача Ч-1
Сотни-тысячи

X число Y сотни Z десятка T тысячи натуральных чисел — это...

Варианты	X	Y	Z	T	Ответ
I	Восьмое	третьей	второго	пятой	4218
II	Пятое	второй	первого	четвертой	3105
III	Седьмое	четвертой	второго	четвертой	3317
IV	Девятое	седьмой	третьего	шестой	5629
V	Первое	второй	пятого	шестой	5141

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Ч-2

Сумма делится, а слагаемые нет

Мистер Фокс задумал некоторое натуральное число N, большее A, но меньшее B, и сложил все натуральные числа от 1 до N. Он обнаружил, что полученная сумма делится на некоторое простое число p, однако ни одно слагаемое на p не делится. Чему равно N?

Варианты	A	B	ответ
I	240	255	250
II	410	420	418
III	215	225	222
IV	360	370	366
V	315	330	316

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Ч-3
Особенные числа подряд

Назовем X-значное число *особенным*, если его нельзя разложить в произведение двух Y-значных чисел. Какое наибольшее количество особенных чисел может идти подряд?

Варианты	X	Y	Ответ
I	5	3	99
II	7	4	999
III	9	5	9999
IV	11	6	99999
V	13	7	999999
Общий	$X = 2N + 1$	$Y = N + 1$	$\underbrace{99..9}_{N} = 10^N - 1$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Ч-4
Сократить дробь

Пусть $\dfrac{m}{n}$ — положительная несократимая дробь. На какое наибольшее число может быть сократима дробь $\dfrac{Am+Bn}{Cm+Dn}$?

Варианты	A	B	C	D	Ответ
I	2	3	3	7	5
II	4	3	5	2	7
III	2	7	3	5	11
IV	7	2	4	3	13
V	2	3	7	2	17
Общий	A	B	C	D	$\lvert AD-BC\rvert$

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Задача Ч-5
Делимость суммы степеней

Известно, что если сумма X натуральных чисел делится на n, то и сумма Y степеней этих же чисел делится на n. Найдите наибольшее возможное натуральное значение n.

Варианты	X	Y	Ответ
I	трёх	седьмых	42
II	трёх	девятых	30
III	трёх	одиннадцатых	66
IV	четырёх	седьмых	42
V	четырех	девятых	30

Посмотрите видеоразбор задачи

Вернуться к таблице с задачами

Уважаемые школьники, родители, учителя!

Ежегодно мы проводим три сезона олимпиады Фоксфорда для школьников 3-11 классов по различным дисциплинам: математика, русский, информатика, физика, химия, биология, история, обществознание, английский язык.

В VIII сезоне мы добавили к традиционным предметам и заданиям три новые олимпиады: логика, бизнес-логика и рэп-культура.

Помимо классических задач школьников ждут головоломки, задачи на сообразительность и смекалку, а также задания, где ответ может быть получен путём доказательных рассуждений, на основе логики, почти без вычислений.

Страница олимпиады Фоксфорда

Уважаемые учителя!

Приглашая школьников участвовать в онлайн-олимпиаде, учителя получают сертификат организатора, благодарственное письмо и призы за активное участие и победы учеников. В VIII сезоне мы разыгрываем: годовые абонементы на курсы Фоксфорда в подарочной упаковке, две путёвки в выездную школу педагогов и директоров, а среди самых активных — 30 000 рублей.

Подробные условия — на странице олимпиады для учителя.

Будем рады видеть Вас и Ваших учеников среди участников и победителей!

Ксения Данилина
координатор олимпиады Фоксфорда