

СЕРГЕЙ ТЫЧИНИН



ЕГЭ–2014 по математике для «чайников»: советы репетитора

Часть4. «Производная функции»

(Задание В9 и В15)

**НОВАЯ
ВЕРСИЯ
ЭКЗАМЕНА**

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию учащихся, сдающих ЕГЭ в 2014 году,
предлагается учебное пособие для самостоятельной подготовки

«ЕГЭ-2014 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»

Пособие состоит из 5 тематических разделов—шагов, в соответствии с которыми,
как мне представляется, довольно удобно готовиться к этому экзамену.

А именно:

- ✓ Шаг №1: «Начни с простого...» (задания В1 – В4)
- ✓ Шаг №2: «Геометрия» (задания В5, В8, В10 и В13)
- ✓ Шаг №3: «Простейшие уравнения и преобразования» (задания В7 и В11)
- ✓ Шаг №4: «Производная функции» (задание В9 и В15)
- ✓ Шаг №5: «Текстовые задачи» (задания В6, В12 и В14)

Свои отзывы и пожелания (если они вдруг неожиданно обнаружатся :)

вы можете отправить мне, перейдя по этой ссылке:

<http://egeprosto.ru/kontakty>



ЛЕНИВО ГОТОВИТЬСЯ ПО КНИЖКЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО?

Запишишься на дистанционный курс здесь: <http://egeprosto.ru/besplatnyj-material/#reg>

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
ОГЛАВЛЕНИЕ	3
ГЛАВА 4: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ».....	4
ЗАДАНИЕ В9	5
ОТСТУПЛЕНИЕ: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ».....	6
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ – ЧТО ЭТО ТАКОЕ?	6
НЕМНОГО О ДЕТАЛЯХ.....	8
9.1. НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ГРАФИКУ ФУНКЦИИ	9
9.2. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ.....	14
9.3. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ САМОЙ ФУНКЦИИ	21
ЗАДАНИЕ В15	25
ЗАДАНИЯ 1-ГО ТИПА: «НАЙТИ ТОЧКУ МАКСИМУМА ИЛИ МИНИМУМА ФУНКЦИИ»	26
ОТСТУПЛЕНИЕ №1: «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ ЭТОЙ ФУНКЦИИ».....	26
15.1. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ e ВЫРАЖЕНИЕ.....	29
15.2. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ x ЧИСЛО.....	35
15.3. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ \ln ВЫРАЖЕНИЕ ИЛИ $\log a$ ВЫРАЖЕНИЕ.....	41
ЗАДАНИЯ 2-ГО ТИПА: «НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ (НАИМЕНЬШЕЕ) ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННОМ ОТРЕЗКЕ».....	45
15.4. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	46
ОТСТУПЛЕНИЕ №2: «ОСОБЫЕ» УГЛЫ И ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ	46
15.5. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ \ln ВЫРАЖЕНИЕ	55
15.6. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ e ВЫРАЖЕНИЕ.....	58
15.7. «ЗАМАСКИРОВАННЫЕ» ЗАДАНИЯ	60
15.8. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ x ЧИСЛО.....	62
15.9. ФУНКЦИЯ НЕ СОДЕРЖИТ ОГРАНИЧИВАЮЩЕГО ИНТЕРВАЛА $[X; X]$	66

ГЛАВА 4: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ»

Ну что же, отдохнув после геометрических заданий на простой и бесхитростной Главе 3, опять немного повысим уровень сложности. В Главе 4 пойдет речь о так называемой «производной функции» и заданиях В9 и В15, которые подходят с разных сторон к этой самой производной. Главное отличие между ними заключается в следующем: задание В9 предлагает работу с графиками (либо самой функции, либо ее производной), а задание В15 – с формулами.

Если слово «производная» вам совсем ни о чем не говорит, или вызывает смутные воспоминания – внимательно прочтайте Тематическое Отступление «Производная функции». Этого будет достаточно для базового, первичного понимания, а все остальное прояснится в процессе рассмотрения типовых заданий.

ЗАДАНИЕ В9

Производная функции. Именно с ней связано задание В9 предстоящего экзамена. В условии этих заданий дается либо график некой функции, либо график производной этой функции. И по этому графику необходимо либо вычислить значение производной в указанной точке, либо сделать какие-то другие выводы.

По сути, эти задания весьма просты, хотя и занимают 9-е место «в рейтинге» первой части экзамена.

Довольно часто, после прочтения школьного учебника, производная функции кажется чем-то нереально сложным. Настолько сложным, что непонятно даже, «о чём все это».

И даже кажется, что простыми словами объяснить это невозможно.

Именно поэтому – для небольшого прояснения вопроса – сделаем очередное Тематическое Отступление. К сожалению, не такое уж и маленькое.

Но, как обычно, если его читать совсем уж не хочется, то можно попробовать сразу перейти к разбору примеров. Возможно, что его окажется достаточно для успешного решения этих заданий.

ОТСТУПЛЕНИЕ: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ».

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ – ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

- 1) Не все функции одинаковы. Более того, они во многом очень даже различны.
Сейчас мы обсудим не все их возможные различия, а только некоторые.
А именно – **скорость их изменения**, то есть убывания или возрастания.

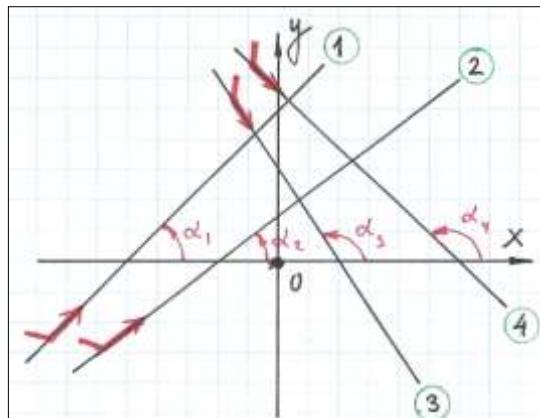


РИСУНОК 9а

Например, функции 1 и 2 – возрастающие (\uparrow), а 3 и 4 – убывающие (\downarrow) (рис. 9а). Отличить друг от друга их очень просто. Если представить некий самолет, который летит по линии функции слева направо, и при этом набирает высоту (\uparrow), то функция возрастает. Если он снижается (\downarrow), то убывает. Функции 1 и 2, как видно, отличаются друг от друга скоростью возрастания («взлета»). А функции 3 и 4 – скоростью убывания («снижения»).

- 2) В чем же **измерять скорость** возрастания или убывания функции?
Самая простая мысль – связать эту скорость с углом наклона прямой линии к горизонту. И эта мысль совершенно правильна! Однако единицей измерения этой скорости сделали не величину угла в градусах, а тангенс этого угла. То есть **отношение длин вертикального катета к горизонтальному** в прямоугольном треугольнике, построенном в створе этого угла (рис. 8б). Именно это отношение и считается равным скорости изменения функции. И действительно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, на сколько единиц изменится функция при изменении ее аргумента на 1 единицу.

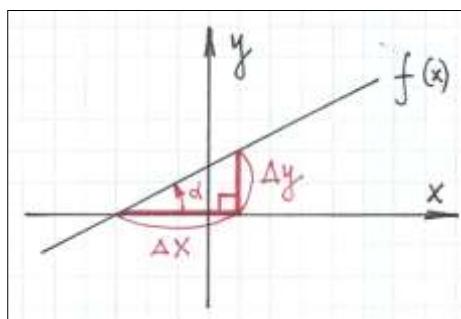


РИСУНОК 9б

Точно так же, как «обычная» скорость, равная $v = \frac{s}{t}$, которая показывает, сколько единиц длины (метров) тело проходит за 1 единицу времени (секунду) (рис. 9в).

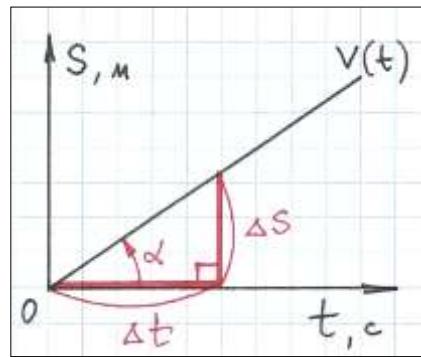


РИСУНОК 9в

- 3) А как быть, если функция представлена не прямой линией, а кривой (рис. 9г)?
 Ведь угол наклона этой линии в разных ее точках различен?
 В этом случае вопрос решается очень просто. В любой точке графика тангенс угла наклона касательной к горизонту, как уже понятно, и будет равен скорости изменения функции.
- 4) Итак, мы приходим к простой схеме нахождения производной:
 выбрать точку на графике функции → провести в ней касательную к графику
 → отметить угол между касательной и горизонтом → вычислить тангенс этого угла.
 Именно ему и будет равна скорость изменения функции («Элементарно, Ватсон!»).

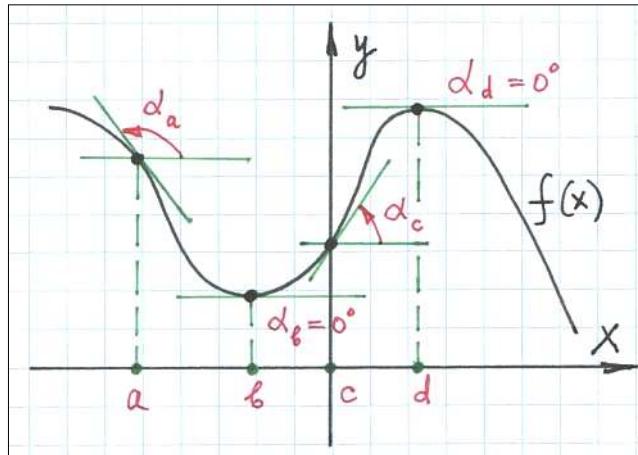


РИСУНОК 9г

- 5) Итак: производная функции в некоторой ее точке **равна тангенсу угла наклона касательной к горизонту, и равна скорости изменения** функции в этой точке.
 Если записать последнее предложение в виде формулы, то получится следующее:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x_0)$$

А теперь поговорим немного о деталях...

НЕМНОГО О ДЕТАЛЯХ...

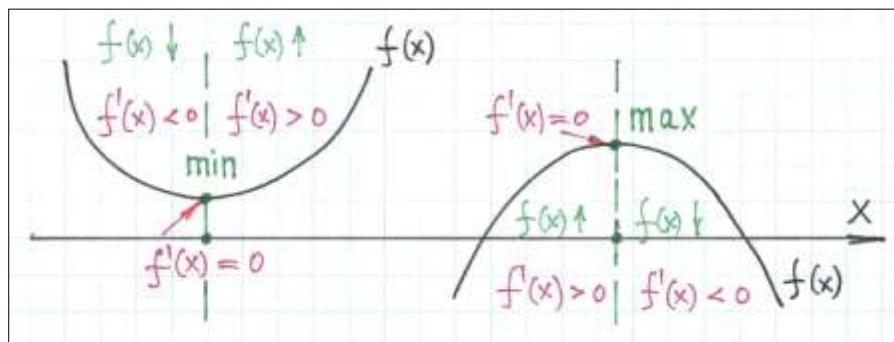


РИСУНОК 9д

Из приведенных выше рисунков можно легко увидеть следующее:

- 6) Если **функция \uparrow** , то ее касательная тоже \uparrow и угол ее наклона к горизонту $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (при отсчете от 0° против часовой стрелки).
Производная такой функции $f'(x) > 0$ (рис. 9г).
- 7) Если **функция \downarrow** , то ее касательная тоже \downarrow и угол ее наклона к горизонту $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Производная такой функции $f'(x) < 0$ (рис. 9г).
- 8) Чем ближе угол наклона касательной к вертикали, тем больше скорость \uparrow или \downarrow функции.
- 9) **В точках максимума и минимума** графика (если таковые есть) касательная всегда горизонтальна. В этих точках $\alpha = 0^\circ \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow f'(x) = 0$. Таким образом, в этих точках скорость функции не изменяется, а производная равна нулю (рис. 9г).
- 10) И последнее: допустим, дан **график производной** функции и по нему видно, что в некоторой точке $f'(x) = 0$. Как же определить – это точка максимума или минимума?
Ответить на этот вопрос поможет рис. 9д.
Глядя на изображенную на нем функцию, можно сделать простые выводы:

Слева от точки максимума **функция \uparrow** ($f'(x) > 0$), справа от нее **функция \downarrow** ($f'(x) < 0$). Таким образом, в точке максимума производная меняет знак с «+» на «-».

Слева от точки минимума **функция \downarrow** ($f'(x) < 0$), справа от нее **функция \uparrow** ($f'(x) > 0$). Таким образом, в точке минимума производная меняет знак с «-» на «+».

Этим и нужно руководствоваться при работе с **графиком производной** функции.

Вот и все, что нужно знать о производной. Что может быть проще 😊?

Впрочем, если вам недостаточно этой информации (как говорится в известной рекламе: «одной порции всегда мало»), вы всегда можете увлекательно провести время с каким-нибудь толстым справочником по математике!

А теперь перейдем к примерам, для решения которых и пригодится вся эта теория.

9.1. НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ГРАФИКУ ФУНКЦИИ



B9.1. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0 . НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f'(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 9.1).

Если задание заключается в **нахождении производной по графику функции**, то удобен, например, такой порядок работы.

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ). В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ " $f'(x) = -$ ", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

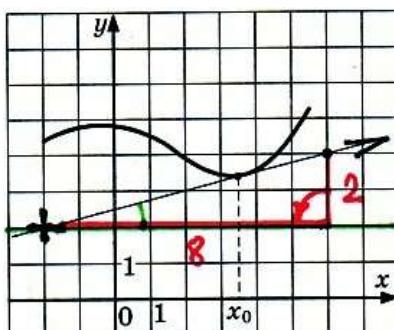


РИСУНОК 9.1

В качестве горизонтальной прямой может быть как ось ОХ, так и другая прямая. Но обязательно (!) выбранная прямая должна пересекаться с касательной точно на пересечении линий клеток графика.

В нашем примере ось ОХ не может быть выбрана «горизонтом», так как в поле рисунка она не пересекается с касательной. Касательная к графику «возрастающая», отмечаем это стрелкой.

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

В нашем примере в поле рисунка можно отметить только один такой угол.

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В нашем примере, удобно выбрать, например, треугольник с катетами $\Delta y = 2$ и $\Delta x = 8$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0 .

$$f'(x_0) = +\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	,	2	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

B9.2. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0 . НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f'(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 9.2).

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ). В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ " $f'(x) = -$ ", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В нашем примере в качестве горизонтальной прямой удобно использовать ось ОХ.

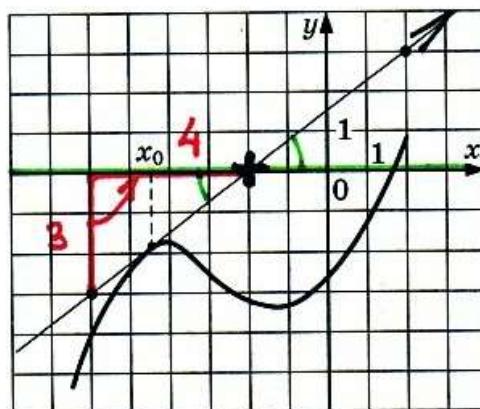


РИСУНОК 9.2

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

Предложенный рисунок позволяет выделить оба угла.

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

На «левом угле» можно построить треугольник с катетами $\Delta y = 3$ и $\Delta x = 4$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0 .

$$f'(x_0) = +\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{3}{4} = 0,75$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	,	7	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

B9.3. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0 . НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f'(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 9.3).

Это задание похоже на два предыдущих.

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ " $f'(x) = -$ ", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В этом примере касательная «убывающая», значит, знак производной будет отрицательным.

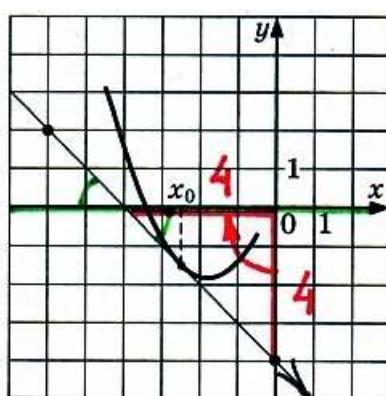


РИСУНОК 9.3

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В качестве варианта можно предложить «правый треугольник» со сторонами $\Delta y = 4$ и $\Delta x = 4$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0 .

$$f'(x_0) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{4} = -1$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	1						
---	----------	--	--	--	--	--	--

B9.4. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0 . НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f'(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 9.4).

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ). В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ " $f'(x) = -$ ", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В этом примере касательная опять «убывающая».

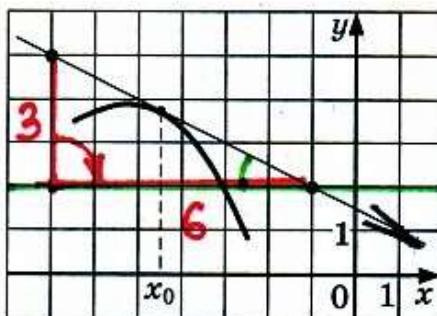


РИСУНОК 9.4

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В качестве варианта можно предложить «левый треугольник» со сторонами $\Delta y = 3$ и $\Delta x = 6$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ x_0 .

$$f'(x_0) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{6} = -0,5$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	0	,	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

А теперь рассмотрим несколько примеров с заданиями В9 другого типа.

9.2. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ



B9.5. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-1; 17)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. НАЙДИТЕ ДЛИНУ НАИБОЛЬШЕГО ПРОМЕЖУТКА УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ (РИС. 9.5).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

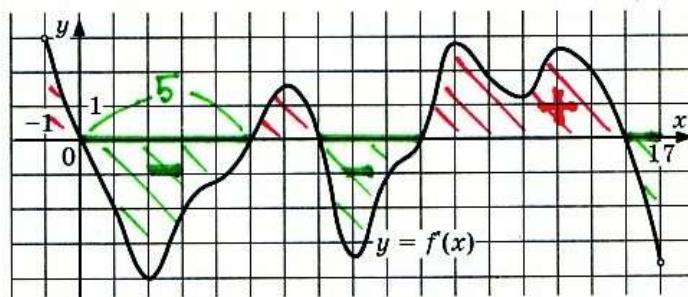


РИСУНОК 9.5

Функция убывает там, где производная $f'(x) < 0$, и график производной находится ниже оси ОХ.

Очевидно, что на промежутке $(-1; 17)$ она убывает на 3-х интервалах, и наибольший из них $(0; 5)$. Его длина равна 5.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5							
---	--	--	--	--	--	--	--

B9.6. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-8; 4)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. В КАКОЙ ТОЧКЕ ОТРЕЗКА $[-5; -1]$ ФУНКЦИЯ $f(x)$ ПРИНИМАЕТ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ (РИС. 9.6)?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

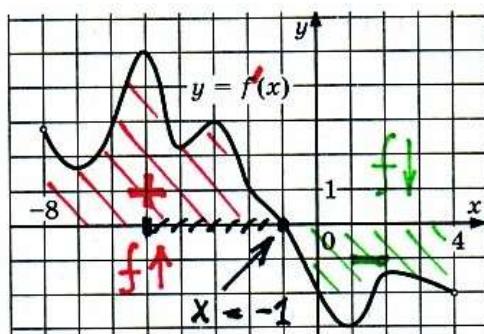


РИСУНОК 9.6

На отрезке $[-5; -1]$, к которому относится вопрос, $f'(x) > 0$ (ее график выше оси ОХ).

Таким образом, на всем этом отрезке функция $f(x)$ возрастает.

Следовательно, свое наибольшее значение на этом отрезке она принимает в точке $x = -1$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

B9.7. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-2; 10)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. В КАКОЙ ТОЧКЕ ОТРЕЗКА $[0; 4]$ ФУНКЦИЯ $f(x)$ ПРИНИМАЕТ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ (РИС. 9.7)?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

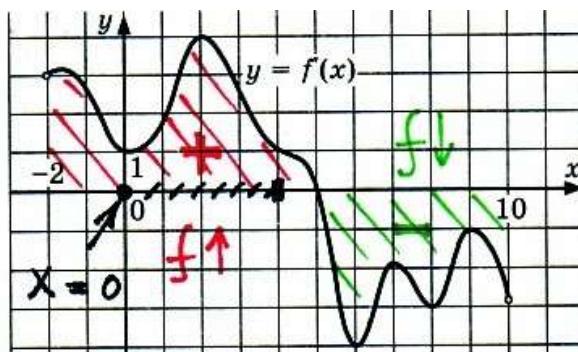


РИСУНОК 9.7

На отрезке $[0; 4]$, к которому относится вопрос, $f'(x) > 0$ (ее график выше оси ОХ).

Таким образом, на всем этом отрезке функция $f(x)$ возрастает.

Скорость ее возрастания изменяется (график «волнится»), но она все время возрастает.

Следовательно, свое наибольшее значение на этом отрезке она принимает в точке $x = 4$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

В9.8. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ПРОМЕЖУТКЕ $(-6; 11)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. УКАЖИТЕ ЧИСЛО ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ПРОМЕЖУТКЕ $(-5; 8)$ (РИС. 9.8).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

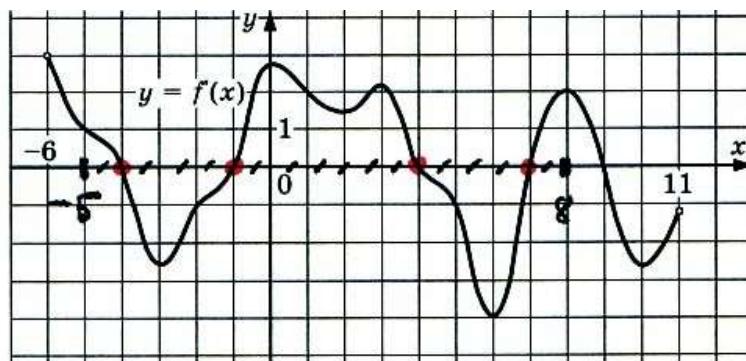


РИСУНОК 9.8

Глядя на график производной, видно, что он пересекает ось ОХ на промежутке $(-5; 8)$ в 4-х точках, и в этих точках $f'(x) = 0$. Во всех этих точках функция имеет либо максимум, либо минимум (то есть – точки экстремума).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4						
---	--	--	--	--	--	--

- B9.9. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-10; 3)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = x + 15$ ИЛИ СОВПАДАЕТ С НЕЙ (РИС. 9.9).**

Задачи такого типа (при первой встрече с ними) вызывают затруднение у большинства выпускников. Обычно непонятно даже, с какой стороны к ним вообще нужно подходить.

Между тем, разобраться в них достаточно просто.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

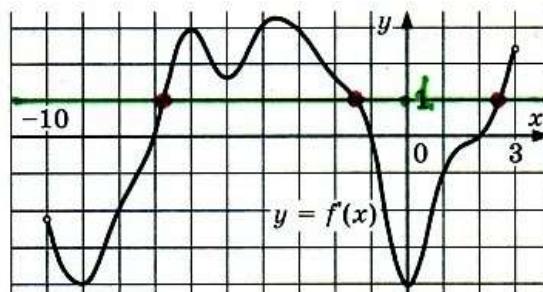


РИСУНОК 9.9

Прямая $y = +1x + 15$, указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x » и равную $+1$. Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f'(x)$, который дан в условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y = f'(x) = +1$.

Таких точек три (3). Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3						
---	--	--	--	--	--	--

B9.10. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-1; 11)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = -2x - 8$ ИЛИ СОВПАДАЕТ С НЕЙ (РИС. 9.10).

Еще одно аналогичное задание.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

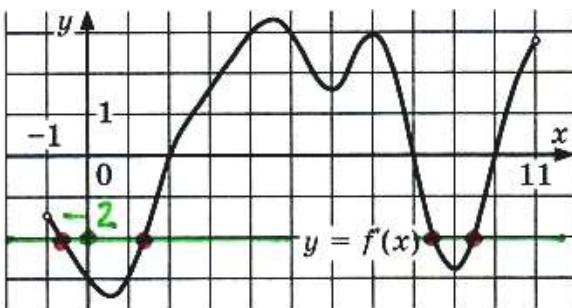


РИСУНОК 9.10

Прямая $y = -2x - 8$, указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x » и равную -2 . Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f'(x)$, который дан в условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y = f'(x) = -2$.

Таких точек четыре (4). Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

B9.11. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-2; 12)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = 4$ (РИС. 9.11).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

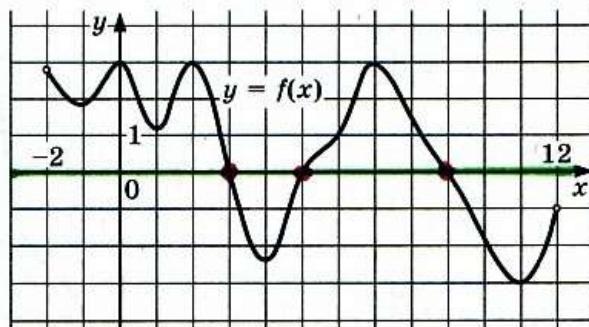


РИСУНОК 9.11

Прямая $y = 4$ ($y = 0 \cdot x + 4$), указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x » и равную 0. Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f''(x)$, который дан в условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y = f'(x) = 0$.

Таких точек три (3). Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

9.3. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ САМОЙ ФУНКЦИИ

**B9.12. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0 .
НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 9.11).**

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

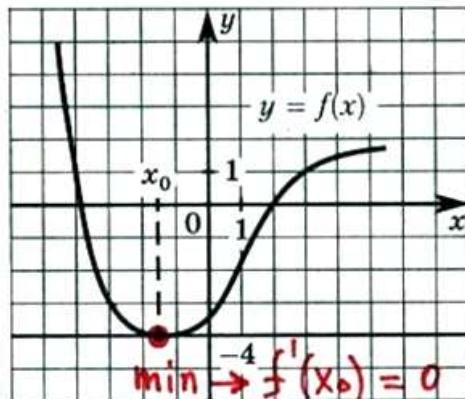


РИСУНОК 9.12

В этом задании требуется найти производную в точке минимума функции.

Касательная к ней уже нарисована, и она горизонтальна. Очевидно, что в этой точке $f'(x) = 0$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0						
---	--	--	--	--	--	--

B9.13. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $f(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-9; 5)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЦЕЛЫХ ТОЧЕК, В КОТОРЫХ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОТРИЦАТЕЛЬНА (РИС. 9.13).

А вот еще одна разновидность задач B9.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

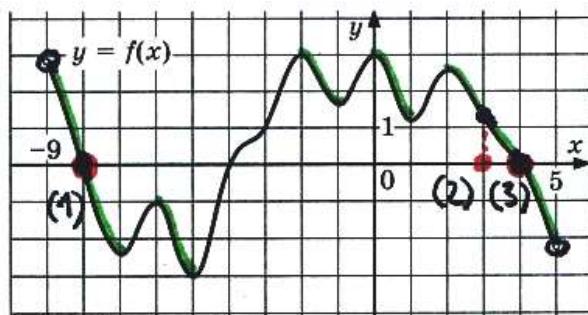


РИСУНОК 9.13

Отрицательным значениям производной соответствуют участки убывания на графике самой функции. Таких участков на заданном графике пять. Как видно на графике, на этих участках всего лишь 3 точки с целым значением « x ». А именно: точки $x = -8$; $x = 3$; $x = 4$. Все остальные точки этих участков являются точками экстремума, и в них производная равна нулю.

А крайние точки $x = -9$ и $x = 5$ по условию графику вообще не принадлежат.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

B9.14. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $f(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-7; 7)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЦЕЛЫХ ТОЧЕК, В КОТОРЫХ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНА (РИС. 9.14).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

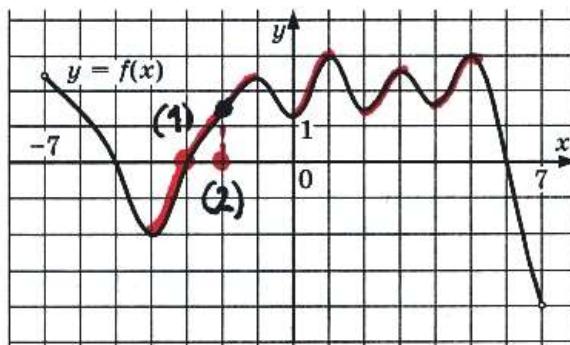


РИСУНОК 9.14

Положительным значениям производной соответствуют участки возрастания на графике самой функции. Таких участков на заданном графике четыре. Как видно на графике, на этих участках всего лишь 2 точки с целым значением « x ». А именно: точки $x = -3$; $x = -2$. Все остальные точки этих участков являются точками экстремума, и в них производная равна нулю.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

Таким образом, все достаточно просто – рисуем на графике, анализируем сделанное, приходим к ответу. Вот, собственно, и все! ☺

Основные советы по выполнению заданий В9:

- Отвыкайте от школьных представлений (если они вообще есть), что производная функции – это что-то сложное. Думайте о ней как об обычной скорости;
- Запомните простую логику: если функция возрастает, то ее производная положительна, если убывает – то отрицательна. В точках максимума и минимума, где скорость равна нулю, производная тоже равна нулю;
- Вычисляя значение производной по графику самой функции, соблюдайте предлагаемый порядок действий (задания В9.1 – 9.4);
- Обращайте в 1-ю очередь внимание на то, график чего предложен в условии задания. Если график производной – значит все будет «непривычно и коряво». Замедляйтесь, обязательно делайте на графике цветами дополнительные пометки (обозначайте точки максимума и минимума, зоны выше и ниже горизонтальной оси и т.д.);
- Несмотря на очевидную простоту, для стабильного правильного выполнения задания В9 обычно требуют достаточно долгой тренировки. Тренируйтесь до их полного «вживления в мозг»;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

ЗАДАНИЕ В15

Mаксимум и минимум. Наибольшее и наименьшее значение функции. Именно с ними связано последнее задание ЕГЭ. Говоря более конкретно, «четырнадцатые» представлены задачами двух типов.

Задачи Первого типа.

«Найти точку максимума или минимума функции».

Например, «найдите точку максимума функции $y = (19 - x)e^{19-x}$ ».

В этих заданиях ответом будет значение x (обязательно десятичное).

Смысл этих задач отражен на рис. 15а.

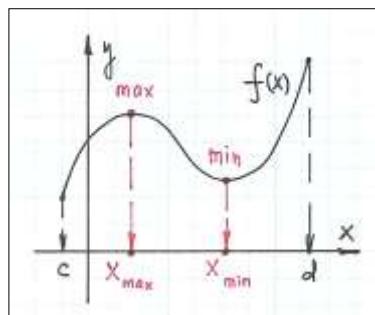


РИСУНОК 15а

Задачи Второго типа.

«Найти наибольшее или наименьшее значение функции y на заданном отрезке аргумента x ».

Например, «найдите наибольшее значение функции $y = 12 \operatorname{tg}x - 12x + 3\pi - 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$ ».

Ответом будет являться значение y (обязательно десятичное).

Смысл этих задач отражен на рис. 15б.

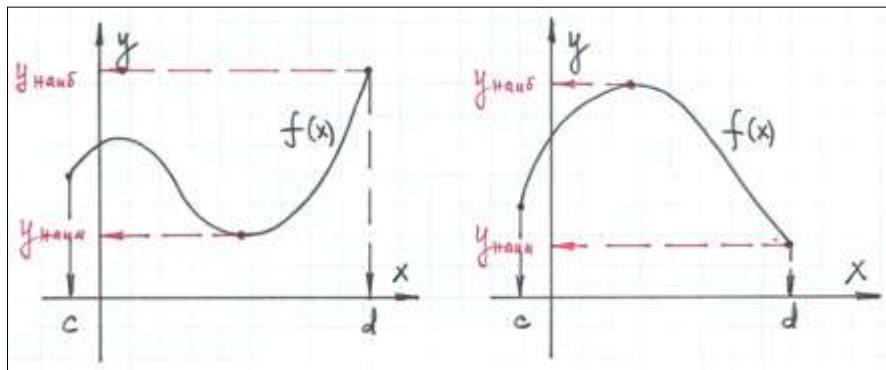


РИСУНОК 15б

При определенном сходстве звучания, эти два типа задач «совсем о разном», и будут далее решаться разными способами. Именно поэтому все примеры решения заданий В15 разбиты на две большие части. Еще раз посмотрите на рисунки 15а и 15б и уясните их отличия!

ЗАДАНИЯ 1-ГО ТИПА:
«НАЙТИ ТОЧКУ МАКСИМУМА ИЛИ МИНИМУМА ФУНКЦИИ»



Для освежения в памяти минимально необходимой для решения всех заданий В15 информации, сделаем еще одно Тематическое Отступление.

ОТСУПЛЕНИЕ №1: «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ ЭТОЙ ФУНКЦИИ».

Для успешного решения заданий Первого типа необходимо помнить формулы производной для некоторых **простейших** функций (примерно, половину того самого набора функций, производные которых приходилось заучивать в школе).

А также уметь вычислять производную **«комбинированных»** функций, составленных из этих простейших. «Комбинированной» мы будем называть функцию, в которой несколько простейших функций соединены знаками сложения, вычитания, умножения или деления.

Например:

$$x - 1; \quad 10x; \quad x^2 - 4x + 5; \quad \frac{3}{x} + 2x^2 - 7; \quad x^3 - 10; \quad \ln x + x; \quad e^x + 2x - 1; \quad 12e^x$$

Не объясняя «с нуля» всех подробностей, рассмотрим ниже таблицы, в которых приведены производные как собственно простейших функций, так и их комбинаций.

Надеюсь, что внимательный (!) разбор приведенных в таблицах формул (и всех примеров к ним) сможет заменить многословную теорию по правилам вычисления производной. Тем более что эта тема должна быть вам в общих чертах знакома.

И еще: далее в тексте будет неоднократно встречаться термин **«сложная функция»**.

Под этим понимается функция, более сложная, чем «просто x », и вставленная внутрь другой функции. Можно сказать, что сложная функция по своему устройству похожа на матрешку.

Например:

$$e^{7x}; \quad e^{-x}; \quad \ln 4x; \quad \ln \frac{x}{3}$$

Можно, конечно, придумать и более сложные функции, и даже комбинации из сложных функций, но не будем без нужды увлекаться этим процессом...

РИСУНОК 15в. Производные простейших функций. Примеры вычисления производной сложных функций.

функции	значения производной
$f(x) = C$, где C – число	$f'(x) = C' = 0$
$f(x) = 3$	$f'(x) = 3' = 0$
$f(x) = -10$	$f'(x) = (-10)' = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$
$f(x) = x$	$f'(x) = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = (e^x)' = e^x$
	$f'(x) = e^x \cdot (x)',$ если x - сложная функция
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) = (e^{-x})'(-x)' = -1e^{-x} = -e^{-x}$
$f(x) = e^{5x}$	$f'(x) = (e^{5x})'(5x)' = 5e^{5x}$
$f(x) = e^{-3x}$	$f'(x) = (e^{-3x})'(-3x)' = -3e^{-3x}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x)',$ если x - сложная функция
$f(x) = \ln 4x$	$f'(x) = (\ln 4x)'(4x)' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$
$f(x) = Cx$	$f'(x) = C$
	$f'(x) = C \cdot (x)',$ если x - сложная функция
$f(x) = 5x$	$f'(x) = 5$
$f(x) = -7x^2$	$f'(x) = -7 \cdot (x^2)' = -7 \cdot 2x = -14x$
$f(x) = 2x^3$	$f'(x) = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$
$f(x) = 3e^x$	$f'(x) = 3(e^x)' = 3e^x$
$f(x) = 3e^{2x}$	$f'(x) = 3(e^{2x})'(2x)' = 3e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}$
$f(x) = 4 \ln x$	$f'(x) = 4(\ln x)' = \frac{4}{x}$

И еще одна таблица, чтобы не было скучно!

РИСУНОК 15г.

Производная суммы простейших функций. Примеры вычисления производной суммы сложных функций.

сумма функций	значения производной
$f(x) = (u + v + \dots)$, где u, v - функции	$f'(x) = (u' + v' + \dots)$
$f(x) = x^2 + 3$	$f'(x) = (x^2)' + 3' = 2x + 0 = 2x$
$f(x) = x^3 + x^2 - 3$	$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' - 3' = 3x^2 + 2x$
$f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3$	$f'(x) = 5(x^3)' + 3(x^2)' - 3' = 15x^2 + 6x$
$f(x) = -2x^3 + x^2 - x$	$f'(x) = -2(x^3)' + (x^2)' - x' = -6x^2 + 2x - 1$
$f(x) = 4x^2 + 5e^x$	$f'(x) = 4(x^2)' + 5(e^x)' = 8x + 5e^x$
$f(x) = 4x^2 + 5e^{-3x}$	$f'(x) = 4(x^2)' + 5(e^{-3x})'(-3x)' = 8x + 5e^{-3x}(-3) = 8x - 15e^{-3x}$
$f(x) = x^3 + 2 \ln x$	$f'(x) = (x^3)' + 2(\ln x)' = 3x^2 + 2/x$
$f(x) = x^3 + 2 \ln 5x$	$f'(x) = (x^3)' + 2(\ln 5x)'(5x)' = 3x^2 + 10 \cdot \frac{1}{5x} = 3x^2 + 2/x$

И еще одна таблица!

РИСУНОК 15д.

Производная произведения простейших функций. Примеры вычисления произведения сложных функций.

произведение функций	значения производной
$f(x) = (u \cdot v)$, где u, v - функции	$f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$f(x) = x \cdot e^x$	$f'(x) = (x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$
$f(x) = x \cdot e^{5x}$	$f'(x) = (x \cdot e^{5x})' = x' \cdot e^{5x} + x(e^{5x})'(5x)' = 1 \cdot e^{5x} + x \cdot e^{5x} \cdot 5 = e^{5x}(1 + 5x)$
$f(x) = x^2 \cdot \ln x$	$f'(x) = (x^2 \cdot \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2(\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$
$f(x) = e^{3x}(2x^2 - x)$	$f'(x) = (e^{3x})'(3x)'(2x^2 - x) + e^{3x}(2x^2 - x)' = 3e^{3x}(2x^2 - x) + e^{3x}(4x - 1) = e^{3x}(6x^2 + x - 1)$

Не сомневаюсь в том, что и вид, и содержание этих таблиц вызвали у вас приступ неподдельного интереса и радости познания ☺!

Имейте в виду, что в этих таблицах содержатся только те функции, которые встречаются в реальных вариантах ЕГЭ! В учебниках и справочниках вы их найдете гораздо больше.

Формула производной частного (то есть деления) простейших функций здесь не приводится не случайно. Ниже будет показано, как в решении примеров можно обходиться и без нее.

А теперь перейдем к конкретным примерам заданий, в которых и используются приведенные выше приемы вычисления производных функций.

15.1. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $e^{\langle\text{выражение}\rangle}$

B15.1.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = (15 - x)e^{15-x}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{15-x} отличается от «просто x », то есть функция является сложной.

Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени.

$$\begin{aligned}y' &= (15 - x)'e^{15-x} + (15 - x)(e^{15-x})'(15 - x)' = -1e^{15-x} + (15 - x)e^{15-x}(-1) = \\&= -e^{15-x} - (15 - x)e^{15-x} = e^{15-x}(x - 16)\end{aligned}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{15-x}(x - 16) = 0$$

$$e^{15-x} = 0 \quad \text{или} \quad x - 16 = 0$$

Первое уравнение решений не имеет (график функции $y = e^{\langle\text{степень}\rangle}$ не пересекает ось ОХ), корень второго уравнения $x = 16$.

Таким образом, функция $y = (15 - x)e^{15-x}$ имеет единственную точку экстремума, которая и будет являться именно точкой минимума (и никак не может оказаться точкой максимума – а иначе что же записывать в ответ?).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	6						
---	---	--	--	--	--	--	--

B15.1.2.

НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ

$$y = (2x^2 - 34x + 34)e^{x-34}.$$



1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{x-34} отличается от «просто x », то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени (хотя в данном случае она равна 1, и не вносит изменения в итоговую формулу).

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 - 34x + 34)'e^{x-34} + (2x^2 - 34x + 34)(e^{x-34})'(x - 34)' = \\ &= (4x - 34)e^{x-34} + (2x^2 - 34x + 34)(e^{x-34}) = 2x(x - 15)e^{x-34} \end{aligned}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 2x(x - 15)e^{x-34} = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 15 = 0$$

В точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 15$ функция имеет точки экстремума.

По условию задания нужно выбрать точку, соответствующую минимуму функции.

3-Й ЭТАП: ВЫБРАТЬ ИЗ НАЙДЕННЫХ ТОЧЕК МАКСИМУМ ИЛИ МИНИМУМ ФУНКЦИИ.

Этот выбор можно сделать двумя способами. Рассмотрим их применительно к решаемому заданию.

Способ 1. Найдем точку минимума функции, анализируя знак ее производной (именно это уже приходилось делать в задании В9).

Нанесем найденные точки экстремума на числовую ось (рис. 15.1.2).

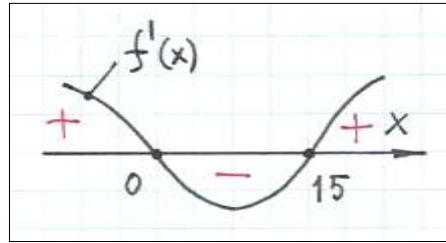


РИСУНОК 15.1.2

Найдем знак производной на одном из интервалов (то есть сделаем так называемую «проверку знака»):

$$y'(x) = 2x(x - 15)e^{x-34}$$

С учетом того, что e^x в любой степени всегда больше нуля, заменим в следующей строке фрагмент e^{x-34} на (+):

$$y'(1) = 2 \cdot 1(1 - 15)e^{1-34} = (+)(-)(+) = (-).$$

Проставим знак производной и на остальных интервалах. Вспомним: в точке минимума функции производная меняет знак с (–) на (+), так как в этой точке у самой функции падение сменяется на рост. Ответом будет $x = 15$.

Способ 2. Найдем точку минимума функции без анализа знака ее производной.

Этот способ более простой, но его можно использовать не во всех, а лишь в некоторых (!) случаях. А именно: если между найденными точками экстремума нет разрывов в значении производной. Иными словами – когда производная существует во всех точках между найденными экстремумами (на числовой оси это означает отсутствие «выколотых» точек между экстремумами). Как, например, в этой задаче: производная существует на всем интервале $(0; 15)$.

Примеры случаев, в которых обсуждаемый сейчас Способ №2 **не применим**, будут приведены в заданиях 15.2.2 и 15.2.3.

Внимание! Если вам все же будет сложно понять различие в применении этих способов (или проще всегда выполнять одно и то же типовое действие), то всегда используйте Способ №1.

Теперь же вернемся к нашей задаче. В рамках 2-го способа, нужно всего лишь сравнить значения самой функции y в точках экстремума. Точке максимума будет соответствовать большее значение y , а точке минимума – меньшее.

Итак, вычислим значение функции в обеих «экстремальных» точках и определим, какая из них будет точкой минимума:

$$y(0) = 34e^{0-34} = 34e^{-34} = \frac{34}{e^{34}} > 0,$$

$$y(15) = (2 \cdot 15^2 - 34 \cdot 15 + 34)e^{15-34} = -26e^{-19} = \frac{-26}{e^{19}} < 0$$

$$y(15) < y(0)$$

Таким образом, $x_2 = 15$ – точка минимума (ответ), а $x_1 = 0$ – точка максимума.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	5					
---	---	--	--	--	--	--

B15.1.3. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ

$$y = (x - 11)^2 e^{x-4}.$$

Преобразуем для удобства последующего вычисления производной исходную функцию:

$$y = (x^2 - 22x + 121)e^{x-4}.$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{x-34} отличается от «просто x », то есть функция является сложной.

Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени (хотя в данном случае ее производная равна 1, и не вносит изменения в итоговую формулу).

$$y' = (x^2 - 22x + 121)'e^{x-4} + (x^2 - 22x + 121)(e^{x-4})'(x - 4)' =$$

$$= (2x - 22)e^{x-4} + (x^2 - 22x + 121)e^{x-4} = e^{x-4}(x^2 - 20x + 99)$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{x-4}(x^2 - 20x + 99) = 0$$

$$e^{x-4} = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 20x + 99 = 0$$

Первое уравнение корней не имеет, а корни второго

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 99}}{2} = \frac{20 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 9 \quad \text{и} \quad x_2 = 11.$$

3-Й ЭТАП: ВЫБРАТЬ ИЗ НАЙДЕННЫХ ТОЧЕК МАКСИМУМ ИЛИ МИНИМУМ ФУНКЦИИ.

Способ 1. Найдем точку максимума функции, анализируя знак ее производной.

В некоторых случаях (например, в этом здании) удобнее не делать «проверку знака» на интервале, а поступить по-другому.

В уравнении производной содержится функция $x^2 - 20x + 99$ (парабола типа «ветви вверх»).

Именно она «дает» корни $x_1 = 9$ и $x_2 = 11$. Множитель $e^{x-4} > 0$ при любом значении степени. Таким образом, чередование знаков на оси определяется только расположением параболы и уже понятно (рис. 15.1.3).

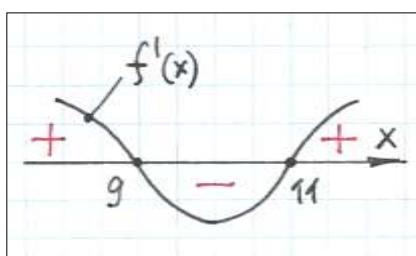


РИСУНОК 15.1.3

В точке максимума функции производная меняет знак с (+) на (-), так как в этой точке у самой функции рост сменяется на падение. Ответом будет $x = 9$.

Способ 2. Найдем точку максимума функции без анализа знака ее производной (поскольку между точками экстремума нет разрыва производной):

$$y(9) = (9 - 11)^2 e^{9-4} = 4e^5 > 0,$$

$$y(11) = 0$$

Таким образом, $x_1 = 9$ – точка максимума (ответ), а $x_2 = 11$ – точка минимума.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

9								
---	--	--	--	--	--	--	--	--

B15.1.4. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = (3x^2 - 42x + 42)e^{7-x}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{7-x} отличается от «просто x », то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени.

$$\begin{aligned}y' &= (3x^2 - 42x + 42)'e^{7-x} + (3x^2 - 42x + 42)(e^{7-x})'(7-x)' = \\&= (6x - 42)e^{7-x} + (3x^2 - 42x + 42)e^{7-x}(-1) = e^{7-x}(-3x^2 + 48x - 84)\end{aligned}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{7-x}(-3x^2 + 48x - 84) = 0$$

$$e^{7-x} = 0 \quad \text{или} \quad -3x^2 + 48x - 84 = 0$$

Первое уравнение решений не имеет, а корни второго

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2} = \frac{16 \pm 12}{2}$$

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 14.$$

Поскольку между точками экстремума нет разрыва производной, для нахождения точки минимума можно воспользоваться более простым способом – Способом №2:

$$y(2) = (3 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 42)e^{7-2} = (12 - 84 + 42)e^5 = -30e^5 < 0$$

$$y(14) = (3 \cdot 14^2 - 42 \cdot 14 + 42)e^{7-14} = 42e^{-7} = \frac{42}{e^7} > 0$$

Таким образом, $x_1 = 2$ – точка минимума (ответ), а $x_2 = 14$ – точка максимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2						
---	--	--	--	--	--	--

15.2. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ $x^{(\text{число})}$ **B5.2.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ** $y = 6x^2 - x^3$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 6x - 3x^2$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 6x - 3x^2 = 0$$

$$3x(4 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 4 - x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 4.$$

Между найденными точками разрыва в значении производной нет. Определим, какая из двух точек будет точкой максимума. Воспользуемся для этого более простым, 2-м способом:

$$y(0) = 0$$

$$y(4) = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 96 - 64 > 0$$

Таким образом, $x_1 = 0$ – точка минимума,
а $x_2 = 4$ – точка максимума (ответ).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

B15.2.2. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $y = -\frac{x^2+225}{x}$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию (для того, чтобы не применять более сложную формулу производной от частного функций):

$$y = -\frac{x^2}{x} - \frac{225}{x} = -x - 225x^{-1}.$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = -1 - (-1)225x^{-2} = -1 + \frac{225}{x^2}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = -1 + \frac{225}{x^2} = 0$$

$$\frac{225}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 225; \quad x = \pm\sqrt{225}$$

$$x_1 = -15 \text{ и } x_2 = 15.$$

А это задание – пример того случая, когда искомую точку можно найти **только Способом №1!** Это связано с тем, что в знаменателе уравнения $y' = -1 + \frac{225}{x^2}$ содержится x , причем $x \neq 0$.

Таким образом, в точке $x = 0$, которая находится между $x_1 = -15$ и $x_2 = 15$, наблюдается разрыв в значении производной. Иными словами, в точке $x = 0$ производная не существует.

Для определения знаков производной функции применим метод интервалов.

Нанесем числа $-15, 0$ и 15 на ось (рис. 15.2.2а).

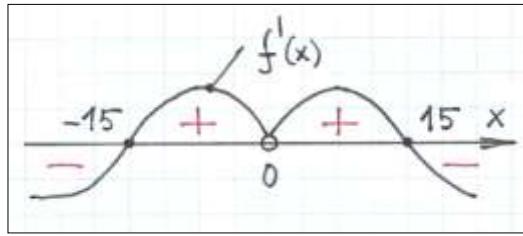


РИСУНОК 15.2.2а

Определим знак производной $y'(x) = -1 + \frac{225}{x^2}$ на одном из интервалов:

$$y'(1) = -1 + \frac{225}{1^2} = (+).$$

Проставим остальные знаки, учитывая, что в точке $x = 0$ происходит «отражение волны» (четная степень над x). Из полученного рисунка видно, что точке максимума соответствует $x = 15$.

Обратите внимание! Применение 2-го способа поиска точки экстремума дало бы неверный ответ:

$$y(-15) = -\frac{225 + 225}{-15} = \frac{450}{15} > 0$$

$$y(15) = -\frac{225 + 225}{15} = -\frac{450}{15} < 0$$

$$y(-15) > y(15)$$

Из этого следует **ошибочный** вывод о том, что $x_1 = -15$ – точка максимума, а $x_2 = 15$ – точка минимума.

Для лучшего понимания ситуации, схематически изобразим график функции, данной в условии (рис. 15.2.26).

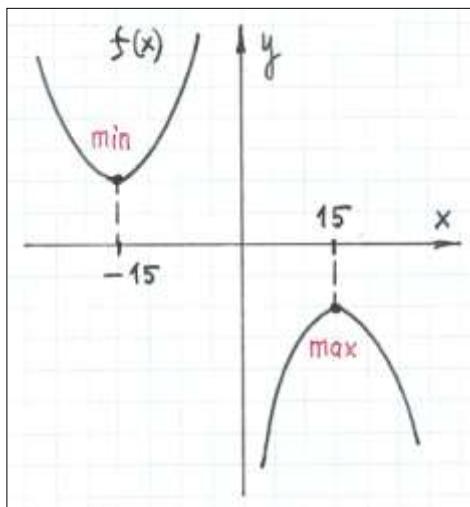


РИСУНОК 15.2.26

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	5					
---	---	--	--	--	--	--

И еще одно похожее задание...

B15.2.3. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = \frac{9}{x} + x + 16$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = \frac{9}{x} + x + 16 = 9x^{-1} + x + 16$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = (-1)9x^{-2} + 1 = -\frac{9}{x^2} + 1 = 1 - \frac{9}{x^2}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\frac{9}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 3.$$

В этом задании, подобно предыдущему, искомую точку можно найти, *только* используя универсальный Способ №2.

В знаменателе уравнения $y' = 1 - \frac{9}{x^2}$ содержится x , причем $x \neq 0$.

Таким образом, в точке $x = 0$, которая находится между $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, наблюдается разрыв в значении производной.

Для определения знаков производной функции применим метод интервалов.

Нанесем числа $-3, 0$ и 3 на ось (рис. 15.2.3а).

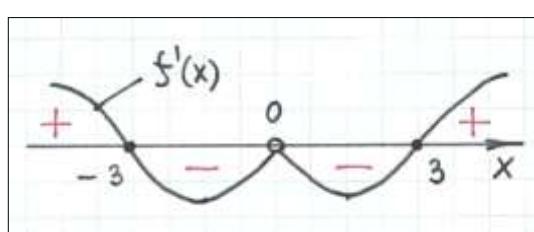


РИСУНОК 15.2.3а

Определим знак производной $y'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ на одном из интервалов:

$$y'(1) = 1 - \frac{9}{1^2} = (-)$$

Проставим остальные знаки, учитывая, что в точке $x = 0$ происходит «отражение волны» (четная степень над x). Из полученного рисунка видно, что точке минимума соответствует $x = 3$.

Обратите внимание! Применение 2-го способа поиска точки экстремума дало бы неверный ответ:

$$y(-3) = -\frac{9}{3} - 3 + 16 = 10$$

$$y(3) = \frac{9}{3} + 3 + 16 = 22$$

$$y(-3) < y(3)$$

Из этого следует **ошибочный** вывод о том, что $x_1 = -3$ – точка минимума.

Для лучшего понимания ситуации, схематически изобразим график функции, данной в условии (рис. 15.2.3б).

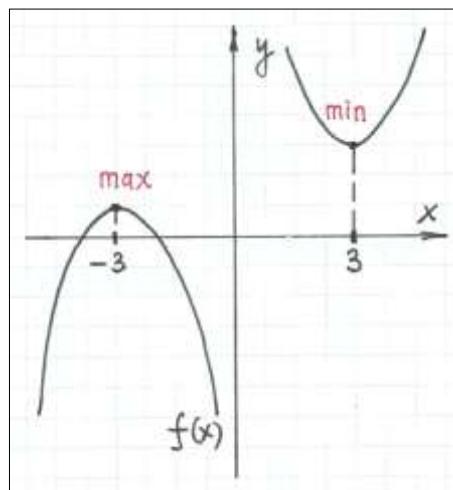


РИСУНОК 15.2.3б

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

B15.2.4. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ

$y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}.$

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = 7 + 6x - 2x^1 x^{\frac{1}{2}} = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 6 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 6 - 3\sqrt{x} = 0$$

$$3\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

Поскольку точка $x = 4$ является единственным экстремумом, то она «автоматически» будет точкой максимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

15.3. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ \ln {ВЫРАЖЕНИЕ} ИЛИ \log_a {ВЫРАЖЕНИЕ}

B15.3.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $y = \ln(x + 5) - 2x + 9$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = \frac{1}{x+5}(x+5)' - 2 = \frac{1}{x+5} \cdot 1 - 2 = \frac{1}{x+5} - 2$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2 = 0$$

$$\frac{1}{x+5} = \frac{2}{1}$$

$$x + 5 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = -4,5$$

Поскольку точка $x = -4,5$ является единственным экстремумом (и кандидатом в ответ), то она и будет точкой максимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	4	,	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

B15.3.2. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = 4x - 4 \ln(x + 7) + 6$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 4 - \frac{4}{x+7} (x+7)' = 4 - \frac{4}{x+7} \cdot 1 = 4 - \frac{4}{x+7}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 4 - \frac{4}{x+7} = 0$$

$$\frac{4}{x+7} = \frac{4}{1}$$

$$x+7 = \frac{4 \cdot 1}{4} = 1$$

$$x = -6$$

Поскольку точка $x = -6$ является единственным экстремумом, то она и будет точкой минимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	6						
---	----------	--	--	--	--	--	--

B15.3.3. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ

$$y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2.$$

А в этом задании, в отличие от предыдущих, содержится не натуральный логарифм, а, если так можно выразиться, «обычный». И производная от него будет вычисляться несколько иначе.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

А если x – сложная функция, то так:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x'$$

Эти формулы отсутствуют в таблице производных простейших функций в Тематическом Отступлении (в начале главы), и поэтому приводятся здесь.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = \frac{1}{(x^2 - 6x + 12) \ln 5} (x^2 - 6x + 12)' = \frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 12) \ln 5}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

Это (и подобные ему) задание, можно делать разными способами.

Способ 1.

$$y' = \frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 12) \ln 5} = 0$$

$$\frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 12) \ln 5} = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

Поскольку точка $x = 3$ является единственным экстремумом, то она и будет точкой минимума.

Способ 2.

Функция $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$ будет наименьшей при наименьшем значении $(x^2 - 6x + 12)$. К этому выводу можно прийти, например, такими способами:

- 1) Нарисовать примерный график функции $y = \log_5 x$. Из него видно, что меньшему значению x соответствует меньшее значение y ;
- 2) Подставить «внутрь логарифма» $\log_5 x$ несколько пробных чисел:

$$\log_5 125 = 3, \quad \log_5 25 = 2, \quad \log_5 1 = 0, \quad \log_5 \frac{1}{5} = -1 \dots$$

Из полученного ряда следует тот же вывод.

Поскольку функция $y = x^2 - 6x + 12$ описывается параболой с ветвями, направленными вверх, то ее наименьшим значением будет значение y в вершине параболы.

Иными словами, наименьшим значением «внутри скобок» будет значение y при

$$x = x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3.$$

Причем, в этой точке наименьшее значение исходной функции совпадает с ее точкой минимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

Приведенных выше примеров для понимания схемы решения заданий Первого типа должно быть вполне достаточно. И мы переходим к заданиям Второго типа...

ЗАДАНИЯ 2-ГО ТИПА:
**«НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ (НАИМЕНЬШЕЕ) ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ
НА ЗАДАННОМ ОТРЕЗКЕ»**

Когда учащийся видит задание В15, обычно сразу же «его рука тянется к производной». И в целом это правильное движение! Именно так и принято делать.

Однако при решении многих заданий Второго типа лучше вообще обойтись без использования производной – потому, что их можно решать гораздо проще («а если нет никакой разницы, то зачем переплачивать?»).

А именно: это касается тех заданий Второго типа, в которых предлагаемая функция *содержит* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$ и e^x .

Делая пособие для «чайников», я старался максимально сжать и упростить многие вопросы. По этой причине некоторые вещи я делаю довольно ненаучно (с точки зрения «правильной» математики). Но эта «ненаучность» не влияет на правильность ответа, и ее можно объяснить следующим:

- 1) Это пособие адресовано читателю, который не особо силен в математике. Ему нужна простота и экономия сил при подготовке к экзамену. И, конечно же, правильный ответ!
- 2) Рассказывать о математике в таком стиле мне больше нравиться самому. То есть говорить «о простом – просто».

Так вот, для решения большинства заданий Второго типа (это относится к заданиям 15.4 – 15.6), я предлагаю использовать способ **«подбора ответа»**, не прибегая к использованию производной вообще. Это и есть один из упомянутых «ненаучных» способов.

Внимание! Предлагаемый способ «подбора ответа» можно применять только для указанных заданий Второго типа, и только на ЕГЭ. И больше нигде!

Секрет способа прост: ключевым моментом подбора ответа в этих заданиях является то, что ответ должен являться десятичным числом. Так задумано в ЕГЭ, и это известно. То есть ответ не должен содержать корней, символов функций и постоянных ($\sqrt{}$, \sin , \cos , \ln , π и так далее).

Таким образом, подбирая ответ, мы исходим именно из этого: для ответа нам нужно получить непременно десятичное число, то есть число вида $X.X$. Все остальные возможные варианты ответов, которые не вписываются в этот шаблон десятичного числа, заранее признаются непригодными и отбрасываются.

Суть предлагаемого способа будет понятна из довольно многочисленных примеров.

15.4. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Некоторые минимально необходимые сведения по тригонометрии уже были даны в задании В8. Но для успешного решения «пятнадцатых» этого недостаточно.

Поэтому сделаем еще одно Тематическое Отступление, в котором некоторая часть информации будет повторена для удобства текущей работы. Просто для того, чтобы «быть под рукой».

ОТСТУПЛЕНИЕ №2: «ОСОБЫЕ» УГЛЫ И ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Итак, для начала приведем таблицу значений тригонометрических функций для «особых» углов 1-й четверти.

	0°	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Эту таблицу не нужно пытаться запоминать полностью, поклетьконо. Достаточно запомнить только значения синуса для углов $30^\circ, 45^\circ$ и 60° . Значения косинуса для этих же углов чередуются в обратном порядке.

Табличные значения, для углов 0° и 90° также можно не запоминать. Их можно легко увидеть (представить) на единичной окружности. Как именно это сделать?

Очень просто: значение синуса равно вертикальной координате вращающейся точки (y), а косинуса – горизонтальной (x).

Углу 0° на единичной окружности соответствует точка с координатами $(1; 0)$, и значит $\cos 0^\circ = x = 1$, а $\sin 0^\circ = y = 0$.

Углу 90° на единичной окружности соответствует точка с координатами $(0; 1)$, и значит $\cos 90^\circ = x = 0$, а $\sin 90^\circ = y = 1$. Вот и все премудрости.

Подобным образом определяются и значения синуса (косинуса) для углов 180° и 270° . После этого остается заполнить значения тангенса (котангенса), которые получаются как отношение синуса к косинусу (или наоборот). Причем для угла 45° значения тангенса и котангенса очевидны: $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.

Теперь идем дальше. Понятно, что в реально решаемых задачах величины углов могут быть совершенно любыми. Однако в заданиях В15 встречаются только определенные, «особые» углы.

Либо уже перечисленные: 0° ; 30° , 45° ; 60° и 90° , либо подобные им, изображенные на рисунке 15e. Как правило, в заданиях В15 углы выражены не в градусах, а в радианах.

Примечание.

- 1) Что такое радианы и для чего они нужны (а также многое другое), мы обсуждать не будем. Как будет показано ниже, «четырнадцатые» можно решать и без этого;
- 2) Все значения «особых» углов 1 – 4 четвертей, обозначенных на рисунке 15e, запоминать тоже не нужно.

Достаточно запомнить только значения $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$; $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$; $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ и $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

А теперь вопрос на сообразительность для «продвинутых чайников»: как, помня только эти три значения, можно быстро получить все остальные (естественно, в радианах)? И как это сделать проще всего?

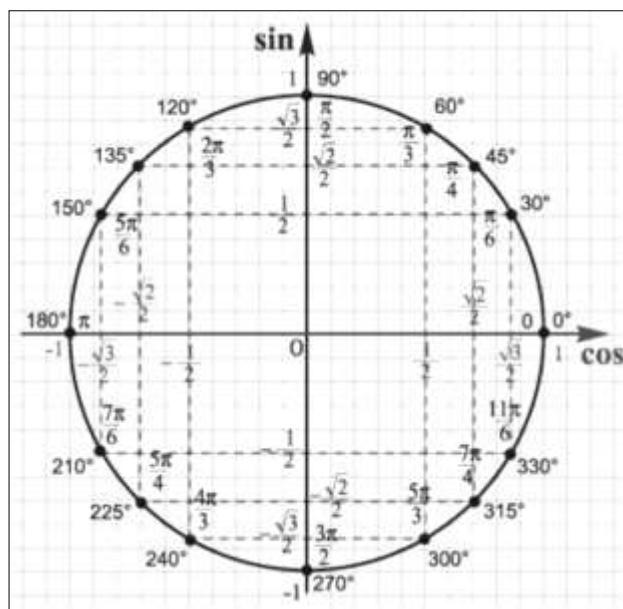


РИСУНОК 15e

Итак, вернемся к рисунку. Глядя на него, легко заметить следующее:

- ✓ Углы, симметричные относительно вертикали, имеют одинаковые значения синусов (то есть координаты y). Например: 60° и 120° , 210° и 330° .
На рисунке углы с равными синусами соединены горизонтальными прямыми;
- ✓ Углы, симметричные относительно горизонтали, имеют одинаковые значения косинусов (то есть координаты x). Например: 30° и 330° , 135° и 225° .
На рисунке углы с равными косинусами соединены вертикальными прямыми;
- ✓ Углы, симметричные относительно начала координат, то есть соединенные прямой, проходящей через т.О $(0; 0)$, имеют одинаковые значения тангенса (и котангенса).

При желании можно самостоятельно сделать множество других выводов из довольно простого рассмотрения этого рисунка. Это действительно полезно как для понимания связи между «особыми» углами 2 – 4 четвертей с «особыми» углами 1 четверти, так и для понимания геометрического смысла тригонометрических функций вообще.

А это понимание, в свою очередь, избавит от совершенно ненужного заучивания лишних цифр по всем «особым» углам. Кроме того, работа с единичной окружностью во многих случаях избавит вас от вычислений с помощью «формул приведения», о которых уже говорилось ранее.

А теперь, после недолгого возврата к основам тригонометрии, перейдем к рассмотрению заданий В15 Второго типа, которые содержат **тригонометрические функции**.



B15.4.1. НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = 3 \sin x + \frac{36}{\pi}x + 5$
НА ОТРЕЗКЕ $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

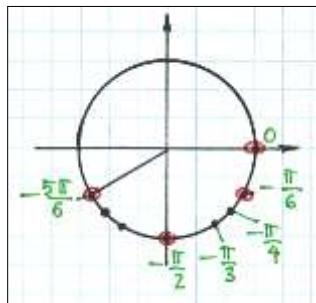


РИСУНОК 15.4.1

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

- a) «Превращение» $\sin x$ в число, не содержащее корня.

Это возможно (вспоминаем табличные значения синуса!)

при $x = -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; 0$ (обведены на рис. 15.4.1);

- b) Слагаемое $\frac{36}{\pi}x$ в исходной функции должно сократиться. Таким образом, x может быть как 0, так и содержать π – то есть любым. Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, не уменьшается.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

$$y(0) = 3 \cdot 0 + \frac{36}{\pi} \cdot 0 + 5 = 5$$

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{36}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} + 5 = -1,5 - 30 + 5 = -25 - 1,5 = -26,5;$$

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{36}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} + 5 = -1,5 - 6 + 5 = -2,5;$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3(-1) - \frac{36}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 5 = -3 - 18 + 5 = -16.$$

Из всех возможных вариантов наименьшим является $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -26,5$.

Его и запишем в ответ.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	2	6	,	5			
---	---	---	---	---	--	--	--

B15.4.2. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cos x + \frac{13\sqrt{3}}{3} x - \frac{13\sqrt{3}\pi}{18} + 11 \text{ НА ОТРЕЗКЕ } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

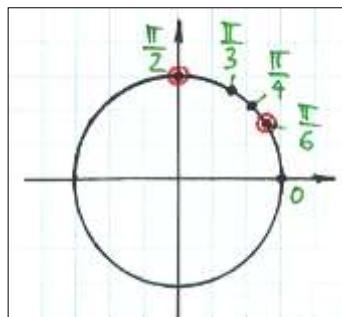


РИСУНОК 15.4.2

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

- a) «Превращение» $\cos x$ в число, содержащее (!) $\sqrt{3}$, или в 0.

Это возможно (вспоминаем табличные значения косинуса)

только при $x = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$ (обведены на рис. 15.4.2);

- b) Слагаемое $\frac{13\sqrt{3}\pi}{18}$ в исходной функции должно сократиться, то есть x обязательно должен содержать π . Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, не уменьшается.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

Варианты решения выглядят так:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{26 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2} + \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{3 \cdot 6} - \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{18} + 11 = 13 + 11 = 24$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{26 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot 0 + \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{3 \cdot 2} - \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{18} + 11 = 0 + \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{6} - \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{18} + 11 - \text{не подходит.}$$

Видно, что во втором варианте число π не сокращается, значит этот вариант не подходит.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	4					
---	---	--	--	--	--	--

B15.4.3. НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = 3 \cos x - 15x + 3 \text{ НА ОТРЕЗКЕ } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0 \right].$$

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

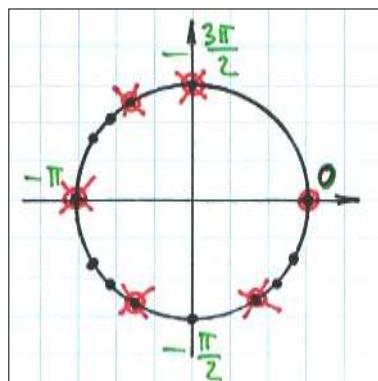


РИСУНОК 15.4.3

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

- a) «Превращение» $\cos x$ в число, не содержащее корень.

Возможные значения x обведены на рис. 15.4.3;

- b) Слагаемое $15x$ в исходной функции не должно содержать π , а значит равно нулю.

Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, уменьшилось до одного.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

$$y(0) = 3 \cdot 1 - 15 \cdot 0 + 3 = 6$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

6							
----------	--	--	--	--	--	--	--

B15.4.4. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = 6 \cos x + \frac{27}{\pi} x + 3 \text{ НА ОТРЕЗКЕ } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0 \right].$$

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

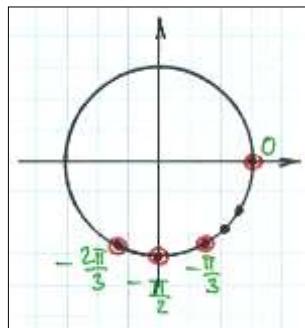


РИСУНОК 15.4.4

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

- a) «Превращение» $\cos x$ в число, не содержащее корень.

Возможные значения x обведены на рис. 15.4.4;

- b) Число π в слагаемом $\frac{27}{\pi}x$ в исходной функции должно сократиться, то есть x равен нулю или содержит π . Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, не уменьшается.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

Варианты решения выглядят так:

$$y(0) = 6 \cdot 1 - \frac{27}{\pi} \cdot 0 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{27}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} + 3 = 3 - 9 + 3 = -3$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6 \cdot 0 - \frac{27}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 3 = -13,5 + 3 = -10,5$$

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{27}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} + 3 = -3 - 18 + 3 = -18$$

Наибольшее значение функции $y(0) = 9$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

9							
----------	--	--	--	--	--	--	--

B15.4.5. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = 12\tan x - 12x + 3\pi - 7$
НА ОТРЕЗКЕ $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

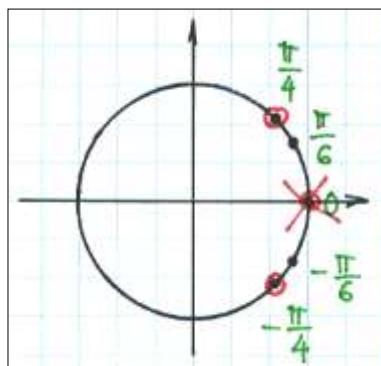


РИСУНОК 15.4.5

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

- «Превращение» $\tan x$ в число, не содержащее корня.
Возможные значения x обведены на рис. 15.4.5;
- Слагаемое 3π в исходной функции должно сократиться, то есть x обязательно должен содержать π . Таким образом, «кандидат» $x = 0$ отсеивается (зачеркнут на рисунке).

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

Вычислим значение функции при 2-х оставшихся возможных табличных значениях x :

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 12(-1) + 12\frac{\pi}{4} + 3\pi - 7 = -19 + 6\pi$$

$$y\left(+\frac{\pi}{4}\right) = 12 \cdot 1 - 12\frac{\pi}{4} + 3\pi - 7 = 12 - 7 = 5$$

Первый вариант не подходит, так как содержит несокращаемое число 6π .

Таким образом, десятичным числом является только $y\left(+\frac{\pi}{4}\right) = 5$.

И хотя, на основании сделанных вычислений, нет никаких оснований считать это число именно наибольшим на заявленном отрезке (кроме его «десятичности»), – этот ответ правильный!

Как в этом, так и в других рассмотренных примерах.

Как говорится, «ловкость рук, и никакого обмана» 😊!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5							
---	--	--	--	--	--	--	--

B15.4.6. НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = 5\tan x - 5x + 6$
НА ОТРЕЗКЕ $[0; \frac{\pi}{4}]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

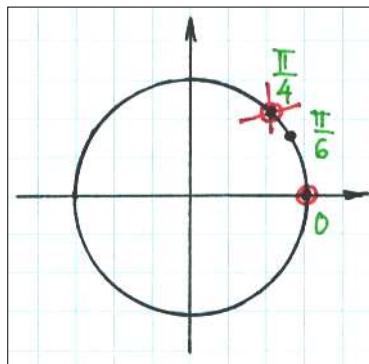


РИСУНОК 15.4.6

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

- «Превращение» $\tan x$ в число, не содержащее корень.
Это возможно только при $x = 0; +\frac{\pi}{4}$ (рис. 15.4.6);
- Слагаемое $5x$ не должно содержать π , то есть x может быть только нулем (лишний «кандидат» на рисунке зачеркнут).

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

С учетом второго условия, вариант $x = +\frac{\pi}{4}$ был отброшен как непригодный.

Остается единственное: $y(0) = 5 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

6							
---	--	--	--	--	--	--	--

15.5. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ \ln (ВЫРАЖЕНИЕ)

Предыдущие примеры содержали одну из тригонометрических функций.

Но кроме них могут встречаться показательная функция (e^x) с основанием $e \approx 2,73$,
или логарифмическая с тем же основанием ($\ln x = \log_e x$).

Эти задания также успешно решаются предложенным способом «подбора ответа».

Работа с ними показана в следующих примерах.

B15.5.1. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \ln(x+2)^8 - 8x$ НА ОТРЕЗКЕ $[-1, 5; 0]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

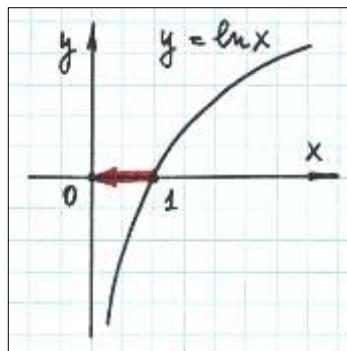


РИСУНОК 15.5а

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: слагаемое $\ln(x+2)^8$ должно исчезнуть.

Это может произойти только тогда, когда «начинка» логарифма (в данном случае это $((x+2)^8)$) равна 1, то есть $(x+2)^8 = 1$. В этом случае $\ln 1 = 0$ (рис. 15.5а).

В нашем примере это означает, что $x+2 = \pm 1$. А значит $x = -1$ или $x = -3$ (выбираем из найденных значений x то, которое будет входить в заданный условием интервал, то есть $x = -1$).

Внимание!

В случае любой **нечетной** степени над скобкой в «начинке» логарифма корень будет только один. Это связано с тем, что сама скобка будет равна не ± 1 , а только $+1$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = -1$ других вариантов нет,

$$y_{\text{наиб}} = y(-1) = 0 - 8 \cdot (-1) = 8$$

И хотя нет никаких оснований считать это число именно наибольшим на заявленном отрезке (кроме его «десятичности»), – этот ответ правильный!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

8							
---	--	--	--	--	--	--	--

B15.5.2. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \ln(7x) - 7x + 7$ **НА ОТРЕЗКЕ $\left[\frac{1}{14}; \frac{5}{14}\right]$.****1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.**

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: слагаемое $\ln(7x)$ должно исчезнуть, «превратившись» в нуль.

Это может произойти в том случае, если «начинка» логарифма (в данном случае $7x$) равна 1.

В нашем примере это означает, что $x = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$ (кстати, это число входит в заданный интервал!).

И действительно, $\ln\left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) = \ln 1 = 0$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = \frac{1}{7}$ других вариантов нет,

$$y_{\text{наиб}} = y\left(\frac{1}{7}\right) = 0 - 7 \cdot \frac{1}{7} + 7 = -1 + 7 = 6.$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.**4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.**

6							
----------	--	--	--	--	--	--	--

15.6. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $e^{(выражение)}$

- B15.6.1.** НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = (x^2 - 7x + 7)e^{x-5}$ НА ОТРЕЗКЕ $[4; 6]$.

А этот пример иллюстрирует применение способа «подбора» для функций, содержащих e^x .

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

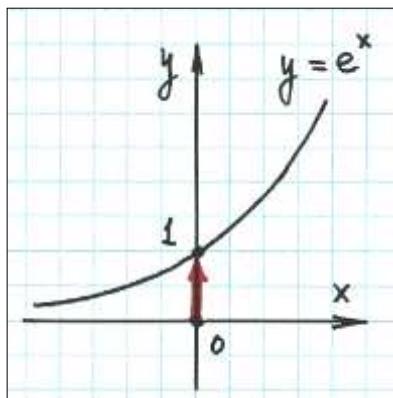


РИСУНОК 15.66

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: множитель e^{x-5} должен исчезнуть.

Это может произойти только тогда, когда показатель степени (в данном случае $x - 5$) равен нулю. В этом случае $e^0 = 1$ (рис. 15.66).

В нашем примере это означает, что $x = 5$ (кстати, это число входит в заданный интервал!). И действительно, $e^{5-5} = e^0 = 1$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = 5$ других вариантов нет,

$$y_{\text{найм}} = y(5) = (5^2 - 7 \cdot 5 + 7) = 25 - 35 + 7 = -3.$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	3						
---	----------	--	--	--	--	--	--

B15.6.2. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = (8 - x)e^{x-7}$ НА ОТРЕЗКЕ $[3; 12]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: множитель e^{x-7} должен исчезнуть.

Это может произойти только тогда, когда показатель степени (в данном случае $x - 7$) равен нулю. В этом случае $e^0 = 1$.

В нашем примере это означает, что $x = 7$ (кстати, это число входит в заданный интервал!). И действительно, $e^{7-7} = e^0 = 1$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = 7$ других вариантов нет,

$$y_{\text{наиб}} = y(7) = (8 - 7) \cdot 1 = 1.$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1							
---	--	--	--	--	--	--	--

Ну что же, вот и закончились задания, которые можно решать «способом подбора ответа». Думаю, что многим читателям такой способ показался забавным и вполне пригодным для применения! Но у кого-то возник вопрос: а как решаются эти задания «правильным способом»? И не лучше ли их решать именно так, не выдумывая никаких подборов?

Конечно можно! Все эти задания можно решать и традиционным способом, используя алгоритм, показанный в заданиях 15.8. Но для этого нужно уметь вычислять производную от всех тригонометрических функций, а также от функций $\ln x$ и e^x (в том числе «комбинированных» и «сложных»). Примеры таких вычислений приведены в таблицах Отступления №1. Именно этого мы избежали, применяя «способ подбора ответа».

Желающие могут потренироваться в решении «правильным способом» самостоятельно!

15.7. «ЗАМАСКИРОВАННЫЕ» ЗАДАНИЯ

В15.7.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ, В КОТОРОЙ ФУНКЦИЯ $y = (6 - x)e^{10-x}$ НА ОТРЕЗКЕ $[2; 9]$ ПРИНИМАЕТ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ.



А при решении подобных задач нужно быть очень внимательным!

Она кажется точно такой же, как и две предыдущие ... но это не так. Ее нельзя решать «подбором ответа», так как нужно найти не наименьшее значение самой функции (то есть y), а «точку, в которой» это происходит (то есть x). В этом случае ошибочно считать, что именно y нужно приводить к десятичному числу, как мы делали ранее.

Подобные задачи нужно решать так, как показано в следующем подразделе 15.8. И, в любом случае, придется вычислять производную функции.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{10-x} отличается от «просто x », то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени.

$$\begin{aligned}y' &= (6 - x)'e^{10-x} + (6 - x)(e^{10-x})'(10 - x)' = -1e^{10-x} + (6 - x)e^{10-x}(-1) = \\&= -e^{10-x} - (6 - x)e^{10-x} = e^{10-x}(x - 7)\end{aligned}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{10-x}(x - 7) = 0$$

$$e^{10-x} = 0 \quad \text{или} \quad x - 7 = 0$$

Первое уравнение решений не имеет (график функции $y = e^{\langle\text{степень}\rangle}$ не пересекает ось ОХ), корень второго уравнения $x = 7$.

Таким образом, функция $y = (6 - x)e^{10-x}$ имеет единственную точку экстремума, которая может являться как точкой минимума, так и точкой максимума.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

Найдем приближенные значения функции в найденных точках экстремума и на границах отрезка.

$$y(2) = (6 - 2)e^{10-2} = 4e^8 > 0$$

$$y(7) = (6 - 7)e^{10-7} = -1e^3 \approx -1 \cdot 2,7^3 \approx -1 \cdot 3^3 \approx -27$$

$$y(9) = (6 - 9)e^{10-9} = -3e^1 \approx -3 \cdot 2,7^1 \approx -9$$

И, хотя и в 2-х последних выражениях приближения достаточно грубые, можно сделать вывод:

$y(7) < y(9) < y(2)$, а значит, в точке $x = 7$ функция принимает наименьшее значение.

И, кроме того, как выяснилось, в ней находится минимум функции.

Очевидно, что $x = 7$ и будет ответом задания.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.**5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.**

7							
---	--	--	--	--	--	--	--

15.8. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ $x^{(\text{число})}$

- B15.8.1.** НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ НА ОТРЕЗКЕ $[-1; 4]$.

Подобные задания нельзя решить хитрым подбором ответа, как удавалось в заданиях пунктов 15.4 – 15.6, поэтому все придется делать правильно, «по-взрослому».

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = -3x^{3-1} + 3 \cdot 2x^{2-1} + 9 = -3x^2 + 6x^2 + 9$$

2-й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$-3x^2 + 6x^2 + 9 = 0$$

$$-x^2 + 2x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 3.$$

Одному из этих значений x соответствует точка максимума, а другому – точка минимума. Но в данном случае не нужно выяснять, какая точка чему соответствует.

3-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$$y(4) = -4^3 + 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 29 = -9$$

$$y(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 29 = -34$$

$$y(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 29 = -2$$

Очевидно, что наибольшим является значение $y(3) = -2$. Это и будет ответом задания.

4-й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	2						
---	---	--	--	--	--	--	--

B15.8.2. НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = x^4 + 4x^3 + 5$ НА ОТРЕЗКЕ $[-2; 2]$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 4x^3 + 12x^2$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 4x^3 + 12x^2 = 0$$

$$4x^2(x + 3) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ или } x + 3 = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -3.$$

Второй корень не входит в заданный отрезок и далее рассматриваться не будет.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$$y(0) = 5$$

$$y(-2) = (-2)^4 + 4(-2)^3 + 5 = 16 - 32 + 5 = -11$$

$$y(2) = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 5 = 16 + 32 + 5 = 53$$

Наибольшим является значение $y(2) = 53$. Это и будет ответом задания.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	3						
---	---	--	--	--	--	--	--

B15.8.3. НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \frac{x^2+49}{x}$ НА ОТРЕЗКЕ $[1; 10]$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{49}{x} = x + 49x^{-1}.$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 1 + (-1)49x^{-2} = 1 - \frac{49}{x^2}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 1 - \frac{49}{x^2} = 0$$

$$1 - \frac{49}{x^2} = 0 \text{ или } x^2 = 49$$

$$x_1 = -7 \text{ и } x_2 = 7.$$

Корень $x_1 = -7$ не входит в заданный отрезок и далее рассматриваться не будет.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$$y(1) = \frac{1+49}{1} = \frac{50}{1} = 50$$

$$y(7) = \frac{49+49}{7} = \frac{98}{7} = 14$$

$$y(10) = \frac{100+49}{10} = \frac{149}{10} = 14,9$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	4	,	9				
---	---	---	---	--	--	--	--

B15.8.4. НАЙДИТЕ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 1$ НА ОТРЕЗКЕ $[0; 9]$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 1 = \frac{2}{3}x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x + 1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1} - 3 = x^{\frac{1}{2}} - 3 = \sqrt{x} - 3$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$$y(0) = 1$$

$$y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 - 3 \cdot 9 + 1 = 18 - 27 + 1 = -8$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	8						
---	----------	--	--	--	--	--	--

15.9. ФУНКЦИЯ НЕ СОДЕРЖИТ ОГРАНИЧИВАЮЩЕГО ИНТЕРВАЛА $[X; X]$

Как правило, задания Второго типа в условии содержат некий интервал, ограничивающий аргумент функции. Однако изредка встречаются и задания, где это условие отсутствует.

Кто-то этого может даже не заметить, а у кого-то это обстоятельство вызывает вопрос: «А как же это решать?» Рассмотрим пример такого, довольно редкого задания.

B15.9.1. НАЙДИТЕ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \log_2(x^2 + 18x + 97) + 7$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Это, и подобные ему задания, можно делать разными способами. Рассмотрим два варианта.

Способ 1. Можно вообще обойтись без вычисления производной.

Функция $y = \log_2(x^2 + 18x + 97) + 7$ будет наименьшей при наименьшем значении «внутри скобок» (то есть $x^2 + 18x + 97$).

К этому выводу можно прийти, например, такими способами:

- 3) Нарисовать примерный график функции $y = \log_2 x$. Из него видно, что меньшему значению x соответствует меньшее значение y ;
- 4) Подставить «внутрь логарифма» $\log_2 x$ несколько пробных чисел:

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_2 1 = 0, \quad \log_2 \frac{1}{2} = -1 \dots$$

Из этого ряда примеров следует тот же вывод.

Поскольку функция $y = x^2 + 18x + 97$ описывается параболой с ветвями, направленными вверх, то ее наименьшим значением будет значение y в вершине параболы.

Иными словами, наименьшим значением «внутри скобок» будет значение y при

$$x = x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2} = -9.$$

Итак,

$$y(x_{\text{верш}}) = y(-9) = (-9)^2 - 18 \cdot 9 + 97 = 81 - 162 + 97 = 16.$$

Таким образом, наименьшее значение данной в условии функции $y = \log_2(x^2 + 18x + 97) + 7$ равно $y = \log_2 16 + 7 = 4 + 7 = 11$.

Способ 2.

Вычислим производную исходной функции и приравняем ее к нулю:

$$y' = \frac{1}{(x^2 + 18x + 97) \ln 2} (x^2 + 18x + 97)' = \frac{2x + 18}{(x^2 - 6x + 12) \ln 2}$$

$$y' = \frac{2x + 18}{(x^2 - 6x + 12) \ln 2} = 0$$

$$2x + 18 = 0; \quad x = -9$$

Точка $x = -9$ является единственным экстремумом исходной функции. Причем, она будет именно точкой минимума, поскольку она соответствует наименьшему значению «скобки внутри логарифма».

Таким образом, в этом задании в точке минимума функции наблюдается ее наименьшее значение.

$$y_{\min} = y_{\text{наим}} = y(-9) = \log_2((-9)^2 - 18 \cdot 9 + 97) + 7 = \log_2 16 + 7 = 4 + 7 = 11$$

Выбирайте тот вариант решения, который вам кажется более удобным. Но понимать желательно оба рассмотренных варианта.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	1							
---	---	--	--	--	--	--	--	--

Вот, собственно, и все! Хотелось бы написать еще что-нибудь умное по этому поводу, но больше я ничего придумать не могу ☺. И так получилось много всякого и разного...

Основные советы по выполнению заданий В15:

- Четко различайте между собой задания Первого типа и Второго типа. Эти задания «совсем о разном». Внимательно читайте условие. Помните о том, что могут быть и «замаскированные» задания (см. пример В15.7.1);
- Разбирайте и отрабатывайте задания этих типов раздельно, не давайте им «перемешаться в голове». Уясните смысл этапов работы с ними и обязательно соблюдайте их;
- Запомните таблицу значений тригонометрических функций для «особых углов» 1-й четверти: 0, 30, 45, 60 и 90 градусов;
- Значения этих функций для углов 2 – 4 четвертей определяйте, либо работая с единичной окружностью (смотрите Тематическое Отступление №2), либо используя формулы приведения;
- Внимательно разберитесь с таблицами производных, расположеннымными в Тематическом Отступлении №1. При необходимости – периодически возвращайтесь к ним. Запомните производные простейших функций и научитесь вычислять производные «комбинированных» и «сложных» функций (все это потребует времени);
- Применяйте прием «подбора ответа» внимательно и осознанно. Он позволяет решать многие задания Второго типа без вычисления производной, и тем самым значительно упрощает работу. Ни в коем случае не применяйте его для заданий Первого типа!
- Как показывает практика, навыки решения заданий В15 нарабатываются достаточно медленно и постепенно. Это связано как с необходимостью освоить и запомнить достаточно разноплановый и объемный материал, так и с разветвленной структурой задания В15.
Дайте себе на это достаточно времени, «и будет вам щастъе!» ☺;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

И подведем итоги этой главы очередной картинкой.

