Задание 30
«Молекулярная физика»
(расчетная задача)

Задача №1

Сферическую оболочку воздушного шара наполняют гелием при атмосферном давлении 100 кПа. Минимальная масса оболочки, при которой шар начинает поднимать сам себя, равна 500 кг. Температура гелия и окружающего воздуха одинакова и равна 0 ^{0}С. Чему равна масса одного квадратного метра материала оболочки шара? Молярная масса гелия 0,004 кг/моль, а воздуха 0,029 кг/моль.

Дано:

$p = 100$ кПа

$m_{об} = 500$ кг

$t = 0\ °C$

$M_{He} = 0{,}004$ кг/моль

$M_{возд} = 0{,}029$ кг/моль

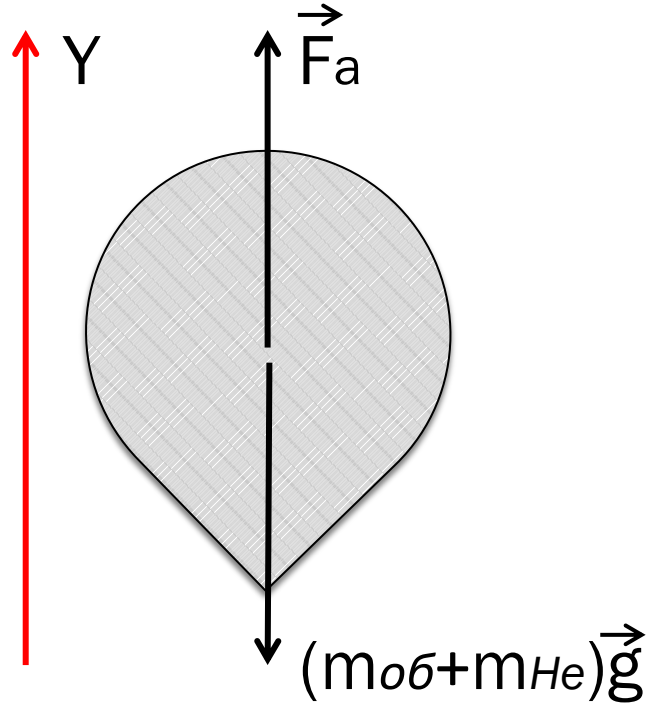
---

m_1 / S_1 - ?

СИ

10^5 Па

Решение:



Шар начинает поднимать себя сам. По II закону Ньютона:

$$\overrightarrow{F_a} + (m_{об} + m_{He})\vec{g} = m\vec{a}$$

При условии что ускорение шара равно нулю и проецируя силы, действующие на шар, на ось OY получаем равенство

$$OY: F_a = (m_{об} + m_{He})g$$

Запишем это равенство с учетом формулы архимедовой силы и в правой части раскроем скобки

$$\rho_в g V = m_{об} g + m_{He} g$$

Шар имеет сферическую форму. Используем формулу для нахождения объёма шара $V=4/3\ \pi\ r^3$, а также выразим массу гелия через его плотность и объём. Тогда получим равенство:

$$\rho_в g\ 4/3\ \pi\ r^3 = m_{об} g + \rho_{He} g\ 4/3\ \pi\ r^3$$

Сократим левую и правую часть на ускорение свободного падения

$$\rho_в\ 4/3\ \pi\ r^3 = m_{об} + \rho_{He}\ 4/3\ \pi\ r^3$$

Выразим массу оболочки

$m_{об} = 4/3\ \pi\ r^3\ (\rho_в - \rho_{He})$,

а затем получим формулу радиуса

$r^3 = 3\ m_{об} / 4\pi\ (\rho_в - \rho_{He})$ (1)

Распишем массу оболочки через массу одного квадратного метра материала оболочки шара

$m_{об} = S \cdot m_1 / S_1$

S – площадь сферы шара

S_1 – площадь 1 м^2 сферы оболочки шара

m_1 – масса 1 м^2 сферы оболочки шара

Тогда масса одного квадратного метра оболочки шара равна

$m_1 / S_1 = S / m_{об}$

Учитывая, что площадь сферы рассчитывается по формуле

$S = 4\ \pi\ r^2$ имеем

$m_1 / S_1 = 4\ \pi\ r^2 / m_{об}$ (2)

Подставляя формулу (1) в формулу (2) получим

$m_1 / S_1 = (4\pi / m_{об}) \cdot (3\, m_{об} / 4\pi\, (\rho_в - \rho_{He}))^{2/3}$

Плотность гелия и воздуха найдем из уравнения Менделеева Клапейрона

$pV=mRT/M \rightarrow p=mRT/VM \rightarrow p=\rho RT/M \rightarrow \rho=Mp/RT$

$\rho_в=M_в p/RT$

$\rho_{He}=M_{He} p/RT$

$T=273+0\ ^0C = 273$ К

Объединяя полученные формулы, найдем искомую величину

$$\boldsymbol{m_1 / S_1 = (4\pi / m_{об}) \cdot (3\, m_{об} / 4\pi\, (M_в p/RT - M_{He} p/RT))^{2/3}}$$

Выполним подстановку числовых значений

m_1 / S_1 = (4π / 500 кг) · (3·500 кг / 4π (0,029кг/моль·10^5 Па/8,31 Дж/моль·К · 273К - 0,004кг/моль·10^5Па/8,31 Дж/моль·К · 273К))$^{2/3}$ = **1,75 кг/м^2**

Задача №2

Сосуд объемом 10 л содержит смесь водорода и гелия общей массой 2 г при температуре 27 ^{0}С. Какого давление смеси, если отношение массы водорода к массе гелия в смеси равно 1,5?

Дано:	СИ	Решение:
$V = 10$ л	10^{-2} м^3	$T=273+27\ ^0C = 300$ К
$m_{см} = 2$ г	0,002 кг	
$t = 27\ °C$		
$m_{H_2} / m_{He} = 1,5$		
$M_{He} = 0,004$ кг/моль		
$M_{H_2} = 0,002$ кг/моль		
p - ?		

Для решения этой задачи используем уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV=mRT/M$$

Запишем это уравнение для водорода и гелия:

$p_{H2}V=m_{H2}RT/M_{H2}$

$p_{He}V=m_{He}RT/M_{He}$

Выразим из этих уравнений давление для водорода и гелия

$p_{H2}=m_{H2}RT/M_{H2}V$ (1)

$p_{He}=m_{He}RT/M_{He}V$ (2)

Смесь создает давление , которое можно расчитать согласно закону Дальтона

$p = p_{H_2} + p_{He}$ (3)

Общая масса смеси этих газов является суммой масс водорода и гелия

$m_{см} = (m_{H_2} + m_{He})$

Учитывая условие задачи $m_{H_2} / m_{He} = 1,5$ определяем массу водорода и гелия

$m_{H_2} = 1,5 \cdot m_{He}$; $m_{см} = (1,5m_{He} + m_{He}) = 2,5m_{He}$

$\mathbf{m_{He}} = m_{см} / 2,5 = \mathbf{0,4\ m_{см}}$

$\mathbf{m_{H_2}} = m_{см} - m_{He} = m_{см} - 0,4\ m_{см} = \mathbf{0,6\ m_{см}}$

Подставляя формулы (1) и (2) в формулу (3) , а также учитывая массы водорода и гелия, определяем давление

$$p = m_{H2}RT/M_{H2}V + m_{He}RT/M_{He}V$$

$$\mathbf{p = RT\,(m_{H2}/M_{H2} + m_{He}/M_{He})\,/\,V}$$

Выполним подстановку числовых значений

p = 8,31 Дж/моль·К · 300К (0,6·0,002кг/0,001кг/моль + 0,4·0,002кг/0,004кг/моль) / 10^{-2} м^3 = **200000 Па** = **200 кПа**

Задача №3

Давление влажного воздуха в сосуде под поршнем при температуре $t = 100\ ^0C$ равно $p_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ Па. Объём под поршнем изотермически уменьшили в $k = 4$ раза. При этом давление в сосуде увеличилось в $n = 3$ раза. Найдите относительную влажность φ воздуха в первоначальном состоянии. Утечкой вещества из сосуда пренебречь.

Дано:

$t = 100\ °C$

$p_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ Па

$k = 4$

$V_1 = k \cdot V_2$

$n = 3$

$p_2 = n \cdot p_1$

φ - ?

Решение:

1) Влажный воздух состоит из сухого воздуха и водяного пара

Пользуясь законом Дальтона, запишем выражения для давления влажного воздуха в сосуде в начальном состоянии:

$$\mathbf{p_1 = p_{1сух} + p},$$

где $\mathbf{p_{1сух}}$ – давление сухого воздуха в сосуде в начальном состоянии,

$\mathbf{p}$ – давление водяного пара в начальном состоянии.

Относительная влажность воздуха φ в первоначальном состоянии

$$\varphi = p / p_0$$

Значит, $p = \varphi \cdot p_0$, где $p_0 = 10^5$ Па – давление насыщенного водяного пара при $t = 100\ ^0C$ равно нормальному атмосферному давлению. Отсюда

$$p_1 = p_{1сух} + \varphi \cdot p_0 \quad (1)$$

2) По условию задачи объем уменьшился в *k* = 4 раза, а давление при этом увеличилось в *n* = 3 раза при T = const. Это значит водяной пар при сжатии стал насыщенным и по уравнению Менделеева – Клапейрона

$$pV=\nu RT$$

Произведение pV уменьшается за счет конденсации части водяного пара в воду.

Закон Дальтона для давления влажного воздуха в сосуде в конечном состоянии:

$$\mathbf{p_2 = p_{2сух} + p_0},$$

где $p_{2сух} = k \cdot p_{1сух}$, $p_2 = n \cdot p_1$ – по условию задачи.

Тогда $n \cdot p_1 = k \cdot p_{1сух} + p_0$ (2)

Из (1) $p_1 = p_{1сух} + \varphi \cdot p_0$

подставим (2) $n \cdot p_1 = k \cdot (p_1 - \varphi \cdot p_0) + p_0$

$$n \cdot p_1 = k \cdot p_1 - k \cdot \varphi \cdot p_0 + p_0$$

$$k \cdot \varphi \cdot p_0 = k \cdot p_1 - n \cdot p_1 + p_0$$

Выразим относительную влажность

$$\varphi = p_1 \cdot (k - n) + p_0 / k \cdot p_0$$

Подставим числовые значения

$$\varphi = 1{,}8 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot (4 - 3) + 10^5 \text{ Па} / 4 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0{,}7$$

Ответ: 70%

Задача №4

В камере, заполненной азотом, при температуре T_0 = 300 К находится открытый цилиндрический сосуд (рис. 1). Высота сосуда L = 50 см. Сосуд плотно закрывают цилиндрической пробкой и охлаждают до температуры T_1. В результате расстояние от дна сосуда до низа пробки становится равным h = 40 см (рис. 2). Затем сосуд нагревают до первоначальной температуры T_0. Расстояние от дна сосуда до низа пробки при этой температуре становится равным H = 46 см (рис. 3). Чему равна температура T_1? Величину силы трения между пробкой и стенками сосуда считать одинаковой при движении пробки вниз и вверх. Массой пробки пренебречь. Давление азота в камере во время эксперимента поддерживается постоянным.

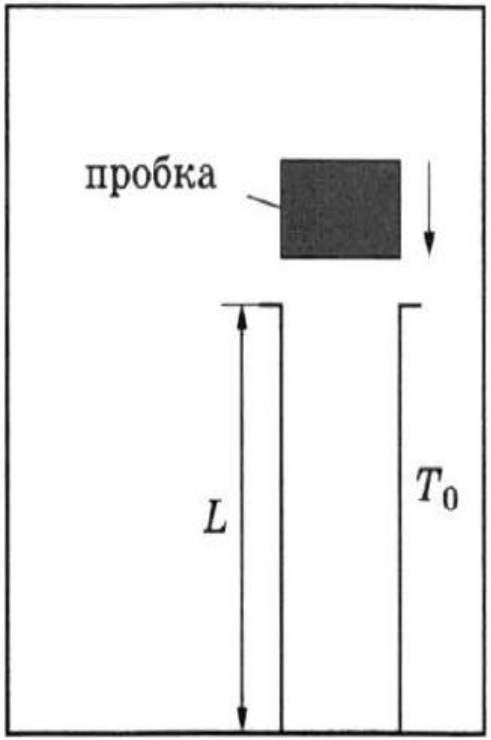


Рис. 1

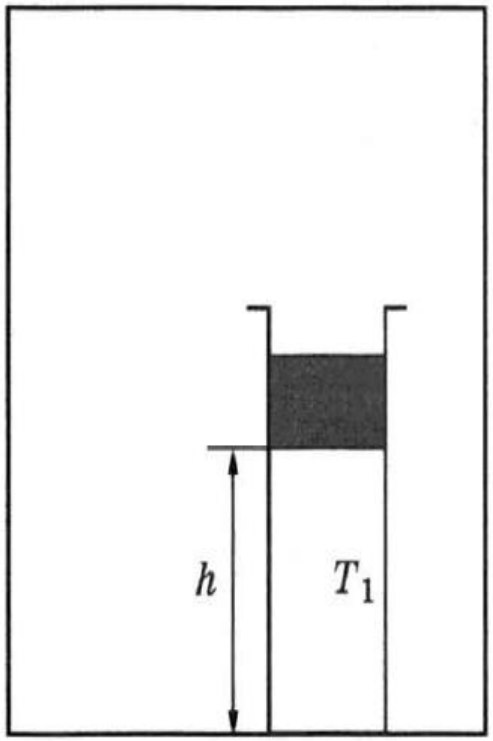


Рис. 2

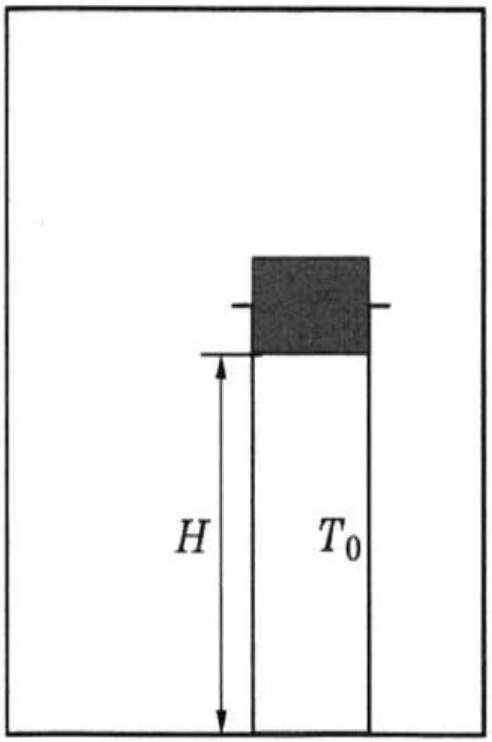


Рис. 3

Дано:	СИ
T_0 = 300 К	
L = 50 см	0,5 м
h = 40 см	0,4 м
H = 46 см	0,46 м
$F_{тр}$ = const	
p_0 = const	
T_1 - ?	

Решение:

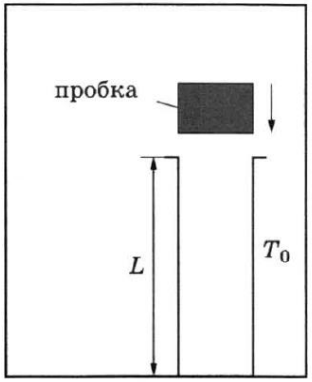


Рис. 1

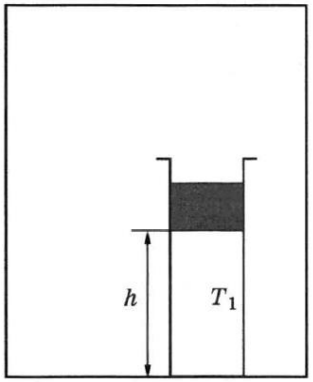


Рис. 2

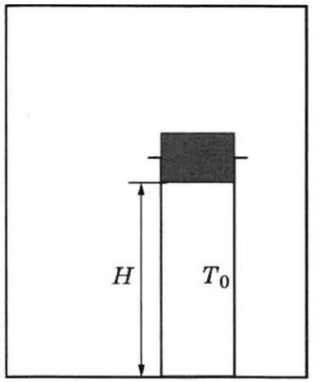


Рис. 3

Пусть p_0 – давление азота в камере;

p_1 –давление в сосуде в ситуации на рис. 2;

p_2 –давление в сосуде в ситуации на рис. 3;

S – площадь горизонтального сечения сосуда.

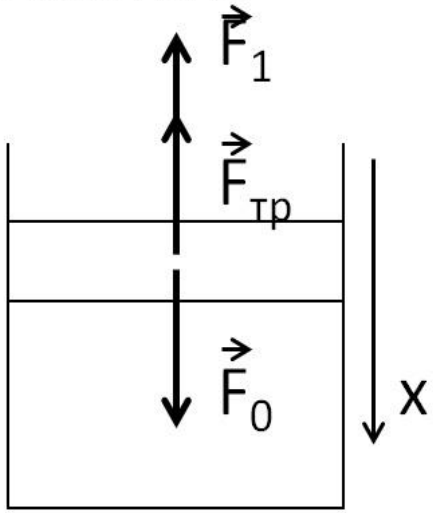
По условию задачи масса газа в сосуде не изменяется $m = const$. Запишем уравнение Клапейрона для 1 и 2 состояния газа $p_0V_0 / T_0 = p_1V_1 / T_1$

где $V_0 = L \cdot S$ - объём газа в сосуде на рис 1,

$V_1 = h \cdot S$ - объём газа в сосуде на рис 2

Выразим $p_1 = p_0V_0 T_1 / T_0V_1 = p_0LST_1 / T_0hS$ (1)

Запишем условие равновесия пробки при T_1 по 2 закону Ньютона



$0 = \vec{F}_0 + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_1$

OX: $0 = F_0 - F_{тр} - F_1$

где $F_0 = p_0 \cdot S$ – сила давления газа на пробку со стороны газа в камере

$F_{тр}$ – сила трения

$F_1 = p_1 \cdot S$ – сила давления газа на пробку со стороны газа в сосуде

$$0 = p_0S - F_{тр} - p_1 \cdot S,$$

откуда $$F_{тр} = (p_0 - p_1) \cdot S \quad (2)$$

Запишем уравнение Клапейрона для первоначального и конечного состояния

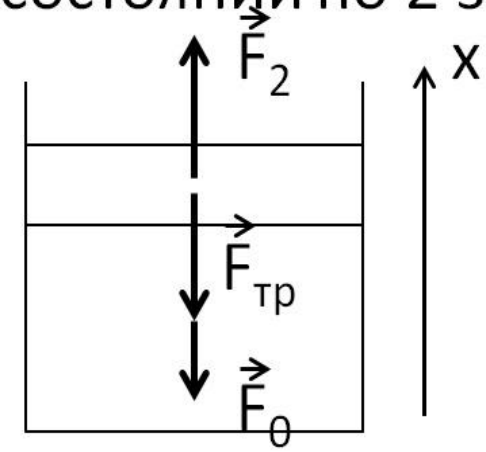
$$p_0V_0 / T_0 = p_2V_2 / T_0$$

где $V_2 = H \cdot S$ - объём газа в сосуде на рис 3, подставляя получим

$$p_0 \cdot L \cdot S = p_2 \cdot H \cdot S$$

откуда $p_2 = p_0 \cdot L / H \quad (3)$

Запишем условие равновесия пробки в конечном состоянии по 2 закону Ньютона



$$0 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_0$$

$$OX: 0 = F_2 - F_{тр} - F_0$$

где $F_2 = p_2 \cdot S$ – сила давления газа на пробку со стороны газа в сосуде

$0 = p_2 \cdot S - F_{тр} - p_0 \cdot S$, откуда $p_2 \cdot S = F_{тр} + p_0 \cdot S$

$$p_2 = F_{тр} / S + p_0 \quad (4)$$

Подставим (2) в (4) и получим $p_2 = (p_0 - p_1) \cdot S / S + p_0 =$

$= p_0 - p_1 + p_0 = 2p_0 - p_1$ (5)

Подставим (1) в (5) и получим

$$p_2 = 2p_0 – p_0LT_1 / T_0h \qquad (6)$$

Приравняем два выражения для p_2 (3) = (6)

$$p_0 \cdot L / H = 2p_0 – p_0 \cdot L \cdot T_1 / T_0 \cdot h$$

$$L / H = 2 – L \cdot T_1 / T_0 \cdot h$$

$$L \cdot T_1 / T_0 \cdot h = 2 – L / H$$

отсюда $\mathbf{T_1 = (2 – L / H) \cdot T_0 \cdot h / L}$

Подставим числовые значения:

$\mathbf{T_1}$ = (2 – 0,5 м / 0,46 м) · 300К · 0,4 м / 0,5 м ≈ **219 К**