СЕРГЕЙ ТЫЧИНИН

ЕГЭ–2014 по математике для «чайников»: советы репетитора

Часть2. «Геометрия»

(Задания B5, B8, B10 и B13)

НОВАЯ ВЕРСИЯ ЭКЗАМЕНА

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию учащихся, сдающих ЕГЭ в 2014 году,
предлагается учебное пособие для самостоятельной подготовки

«ЕГЭ-2014 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»

Пособие состоит из 5 тематических разделов–шагов, в соответствии с которыми, как мне представляется, довольно удобно готовиться к этому экзамену.

А именно:

- ✓ Шаг №1: «Начни с простого…» (задания B1 – B4)
- ✓ Шаг №2: «Геометрия» (задания B5, B8, B10 и B13)
- ✓ Шаг №3: «Простейшие уравнения и преобразования» (задания B7 и B11)
- ✓ Шаг №4: «Производная функции» (задание B9 и B15)
- ✓ Шаг №5: «Текстовые задачи» (задания B6, B12 и B14)

Свои отзывы и пожелания (если они вдруг неожиданно обнаружатся :)
вы можете отправить мне, перейдя по этой ссылке:
http://egeprosto.ru/kontakty

ЛЕНИВО ГОТОВИТЬСЯ ПО КНИЖКЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО?

Запишись на дистанционный курс здесь: http://egeprosto.ru/besplatnyj-material/#reg

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 1

ГЛАВА 2: «ГЕОМЕТРИЯ» ... 3

ЗАДАНИЕ B5 ... 4

ЗАДАНИЕ B8 ... 14

ОТСТУПЛЕНИЕ: «АЗБУКА ТРИГОНОМЕТРИИ» ... 15

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ B8 ... 17

ЗАДАНИЕ B10 ... 32

ЗАДАНИЕ B13 ... 42

ГЛАВА 2: «ГЕОМЕТРИЯ»

Итак, группа самых простых заданий ЕГЭ (B1 – B4) осталась позади. Время сделать следующий шаг, взяться за следующую «порцию» заданий. И эта, следующая порция представлена четырьмя геометрическими заданиями: B5, B8, B10 и B13.

И в таком порядке шагов есть определенный смысл. Дело в том, что некоторые сведения из геометрии и тригонометрии, так или иначе, будут востребованы на следующих этапах. И в Главе 3 (группа заданий «Уравнения и выражения»), где в задании B11 встречаются тригонометрические выражения. И в Главе 4 (группа заданий «Производная функции»), особенно в задании B15.

Вместе с тем, такой порядок прохождения глав желателен, но не жестко обязателен – это вопрос вашего выбора.

А теперь, сделав необходимый разгон на вступлении, перейдем к практике…

ЗАДАНИЕ B5

Суть заданий B5 (по крайней мере, многих из них) напоминает некую упражнение-игру из начальных классов школы. И сводится к нахождению площади какой-либо довольно простой нарисованной фигуры.

Как ни странно, но даже в таком незамысловатом задании существуют несколько способов решения. В том числе – довольно сложные и неудобные (например, подсчет клеточек в нарисованной фигуре. Или разучивание формул различных геометрических фигур без всякой на то необходимости). Мы их, естественно, рассматривать не будем, а сразу перейдем к одному простому и универсальному способу.

Простым я его называю потому, что вам не потребуется знание формул площадей фигур (кроме площади окружности и прямоугольного треугольника). Что, согласитесь, не так уж и много!

Итак, для успешного решения этого задания достаточно помнить следующие формулы:

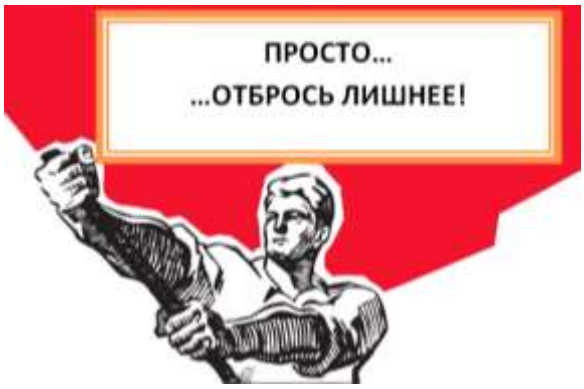
$$S_{\text{прям.треуг}} = \frac{ab}{2}$$

(где a и b – катеты этого треугольника);

$$S_{\text{окр}} = \pi r^2$$

(где r – радиус окружности, а по поводу буквы π пока можно ничего не знать. Пусть это будет просто буква, которая обозначает какое-то число, и которая при вычислениях все-равно сократится).

С помощью этого способа легко можно найти площадь любой фигуры (кроме окружности), предлагаемой на ЕГЭ. Суть этого способа будет понятна из конкретных примеров.



B5.1. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЗОБРАЖЕННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С РАЗМЕРОМ КЛЕТКИ $1\text{СМ} \times 1\text{СМ}$. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ (РИС. 5.1).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ФИГУРЫ.

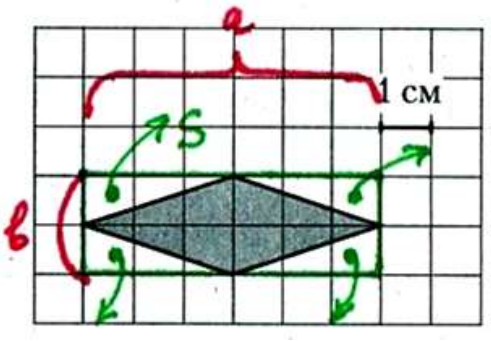


РИСУНОК 5.1

Построим вокруг искомого четырехугольника прямоугольник со сторонами a и b (одна из них должна быть обязательно горизонтальной, другая – вертикальной). Очевидно, что искомая площадь равна площади построенного прямоугольника, за вычетом площадей 4-х «лишних» одинаковых треугольников.

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

$$S = S_{\text{прям}} - 4S = ab - 4S_{\text{треуг}} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} = 12 - 6 = 6$$

Площадь каждого из «выброшенных» треугольников равна половине произведения его катетов.

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

Даже в таких простых вычислениях периодически бывают ошибки.
Наиболее правильный путь – решить все заново, не заглядывая в предыдущее решение.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6							

B5.2. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЗОБРАЖЕННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С РАЗМЕРОМ КЛЕТКИ $1\text{СМ} \times 1\text{СМ}$.
ОТВЕТ ДАЙТЕ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ (РИС. 5.2).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ФИГУРЫ.

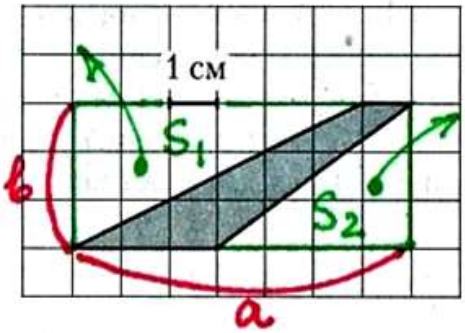


РИСУНОК 5.2

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

В нашем примере искомая фигура – это трапеция. Ее площадь вычислим тем же способом:

$$S = S_{\text{прям}} - (S_1 + S_2) = ab - (S_1 + S_2) = 3 \cdot 7 - \left(\frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2}\right) = 21 - (9 + 6) = 21 - 15 = 6$$

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6							

B5.3. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЗОБРАЖЕННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С РАЗМЕРОМ КЛЕТКИ 1СМ × 1СМ. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ (РИС. 5.3).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ФИГУРЫ.

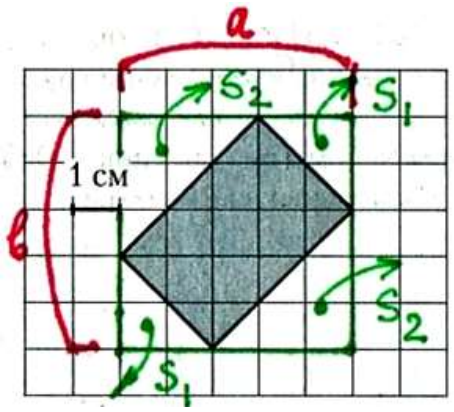


РИСУНОК 5.3

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

$$S = S_{\text{прям}} - (2S_1 + 2S_2) = ab - 2(S_1 + S_2) =$$

$$= 5 \cdot 5 - 2\left(\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2}\right) = 25 - 2(2 + 4{,}5) = 25 - 13 = 12$$

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***2***						

B5.4. ОСНОВАНИЯ РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ РАВНЫ 2 И 14, А ЕЕ БОКОВЫЕ СТОРОНЫ РАВНЫ 10. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ.

А в этой задаче нет готового рисунка, поэтому сделаем его сами (рис. 5.4).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ФИГУРЫ.

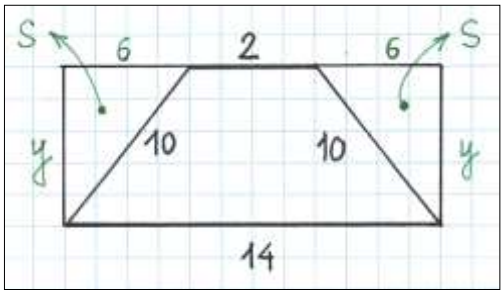


РИСУНОК 5.4

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

$$S = S_{\text{прям}} - 2S = 14y - 2\left(\frac{6y}{2}\right) = 14y - 6y = 8y$$

По теореме Пифагора найдем y из любого заштрихованного треугольника:

$$10^2 = 6^2 + y^2$$

$$y^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$y = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

По смыслу задачи подходит только корень $y = +8$.

Таким образом, $S = 8y = 64$.

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

В основу проверки можно взять следующий факт: сумма площадей трапеции и 2-х заштрихованных треугольников должна равняться площади всего прямоугольника. Проверим это:

$$64 + 2\frac{6y}{2} = 14y$$

$$64 + 48 = 14 \cdot 8$$

$$112 = 112$$

Все правильно!

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6	***4***						

Эта задача является примером того, что геометрическая фигура не обязательно будет дана на клетчатом фоне – клеток может и не быть. Но это ничего не меняет в способе ее решения. Так что не нужно впадать в ступор, если на рисунке вы не увидели знакомых клеточек!

B5.5. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА, ВЕРШИНЫ КОТОРОГО ИМЕЮТ КООРДИНАТЫ (10; 9), (4; 7) И (1; 7).

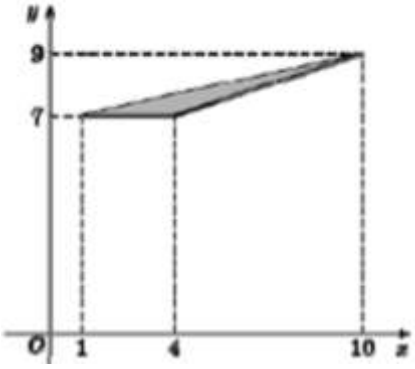
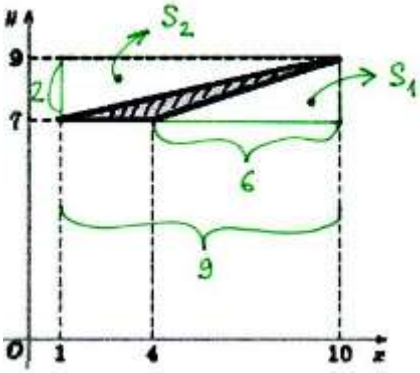


РИСУНОК 5.5

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.



2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

$$S = 9 \cdot 2 - (S_1 + S_2) = 18 - \left(\frac{6 \cdot 2}{2} + \frac{9 \cdot 2}{2}\right) = 18 - 15 = 3$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

А теперь рассмотрим несколько заданий, связанных с окружностью.

B5.6. НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ НАРИСОВАН КРУГ, ПЛОЩАДЬ КОТОРОГО РАВНА 16. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЗАКРАШЕННОЙ ФИГУРЫ.

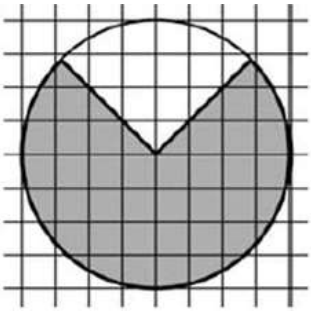
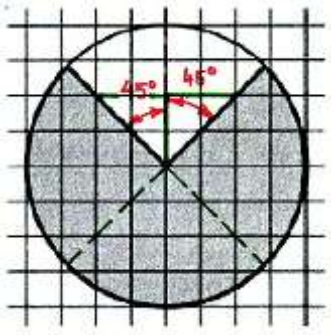


РИСУНОК 5.6

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.



2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

На рисунке видно, что угол белого сектора равен $90°$, значит этот сектор составляет $1/4$ площади круга. Таким образом, площадь закрашенного сектора (который требуется найти) равна

$$\frac{3}{4}S_{\text{круга}} = \frac{3S_{\text{круга}}}{4} = \frac{3 \cdot 16}{4} = 3 \cdot 4 = 12$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***2***						

B5.7. НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С КЛЕТКАМИ 1 СМ × 1 СМ ИЗОБРАЖЕНА ФИГУРА. НАЙДИТЕ ЕЕ ПЛОЩАДЬ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ. В ОТВЕТЕ ЗАПИШИТЕ $\frac{S}{\pi}$.

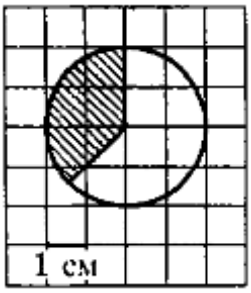
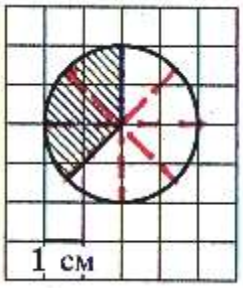


РИСУНОК 5.7

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.



2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА.

На рисунке видно, что радиус окружности $r = 2$, а угол закрашенного сектора равен $90° + 45° = 135°$. Вычислим, какую часть от площади круга составляет этот сектор:

$$\frac{135}{360} = \frac{135:5}{360:5} = \frac{27}{72} = \frac{27:9}{72:9} = \frac{3}{8}$$

К тому же выводу можно придти и без всяких вычислений: на рисунке видно, что величина закрашенного сектора равна трем 45-градусным «долькам». А весь круг состоит из восьми таких «долек».

Значит, площадь сектора, который требуется найти, равна

$$S_{\text{сектора}} = \frac{3}{8} S_{\text{круга}} = \frac{3S_{\text{круга}}}{8} = \frac{3\pi r^2}{8} = \frac{3\pi \cdot 4}{8} = 1{,}5\pi$$

Запишем в ответ (как требуется в условии) значение выражения

$$\frac{S_{\text{сектора}}}{\pi} = \frac{1{,}5\pi}{\pi} = 1{,}5$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

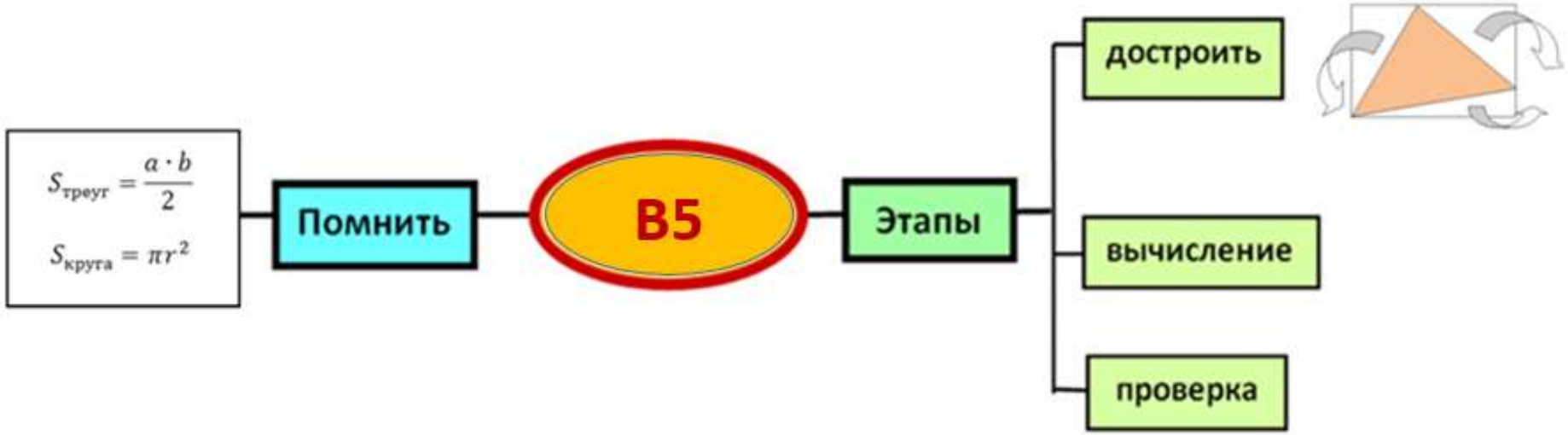
4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***,***	***5***					

Приведенных примеров вполне достаточно, чтобы научиться самостоятельно решать такие простые задания. Хотя, возможно, вам больше нравится (или просто привычнее) использовать формулы площадей различных фигур? Или считать количество полных и неполных клеточек. Если так – пользуйтесь этим на здоровье. Лишь бы ответ был правильным!

Основные советы по выполнению заданий B5:

- Запомните формулы площадей прямоугольного треугольника и окружности;
- Если заданная в условии фигура не окружность – достройте ее до прямоугольника. После этого из его площади вычитайте площади «лишних» фигур;
- Вычисления записывайте подробно и в одну строчку;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.


$S_{треуг} = \frac{a \cdot b}{2}$
$S_{круга} = \pi r^2$
Помнить
B5
Этапы
достроить
вычисление
проверка

ЗАДАНИЕ B8

Задания B8 – это одно из немногих мест части «B» экзамена, где встречаются элементы тригонометрии и планиметрии («плоской геометрии»).

Как правило, эти задания довольно однотипны и просты, и при минимальной подготовке к ним не вызывают больших трудностей.

Минимальный объем сведений, который позволяет успешно решать большинство типовых заданий B8, будет представлен ниже в специальном Тематическом Отступлении.

ОТСТУПЛЕНИЕ: «АЗБУКА ТРИГОНОМЕТРИИ»

1) С большой вероятностью можно ожидать, что большинство заданий B8 будет связано с ***прямоугольным треугольником***.
А для их решения понадобится так называемая «теорема Пифагора».
Ее суть состоит в том, что в любом прямоугольном треугольнике его стороны связаны следующим соотношением: $c^2 = a^2 + b^2$ (рис.6а).
В этой формуле длина гипотенузы обозначена буквой c, а катеты – буквами a и b.

2) Во многих заданиях упоминаются ***тригонометрические функции***: ***синус, косинус, тангенс, котангенс***. Не обсуждая подробно многие моменты, связанные с этими функциями, ограничимся только самым необходимым.
А именно: все эти функции можно определить как ***отношения длин сторон в прямоугольном треугольнике.***
Покажем это на том же прямоугольном треугольнике (рис. 6а).
И смысл тригонометрических функций поясним на примере угла А.

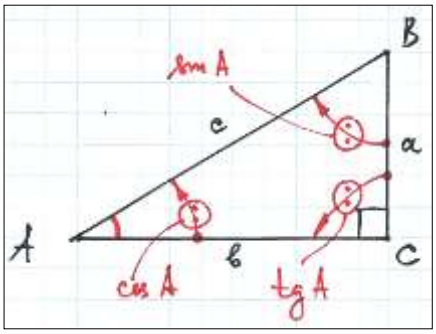


РИСУНОК 6а

Тригонометрические функции, которые являются отношением определенных двух сторон прямоугольного треугольника, показаны стрелками. Итак:

$\sin A = {}^{a}/_{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе),

$\cos A = {}^{b}/_{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе),

$\mathrm{tg}\, A = {}^{a}/_{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему),

$\mathrm{ctg}\, A = {}^{b}/_{a}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему).

Прилежащим называется катет, который «прилежит», то есть «находится рядом» с рассматриваемым углом. Противолежащим – катет, «лежащий напротив» угла.

Если буквенные обозначения сторон сделать другими, то это приведет только к другой записи тригонометрических функций. А отношение сторон будет тем же самым.

Помимо этой информации, полезно помнить, что тангенс и котангенс угла можно выразить не только через отношения сторон треугольника, но и через синус и косинус этого же угла, а также друг через друга.

А именно:

$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$

$\operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

3) В большинстве задач упоминаются значения тригонометрических функций углов $30°$, $45°$ или $60°$. И их, естественно, нужно помнить. А чтобы их «было откуда запомнить» без листания справочников, приведем таблицу этих значений.

функция	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\operatorname{tg}\alpha$	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$

4) Довольно часто в тригонометрических заданиях приходится пользоваться известным соотношением $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ («***основное тригонометрическое тождество***»). Обычно эта формула используется для выражения из нее синуса или косинуса.
Если это проделать, то получится следующее:

$\sin x = \pm\sqrt{1-(\cos x)^2}$

$\cos x = \pm\sqrt{1-(\sin x)^2}$

В большинстве заданий B6 (в которых, как правило, идет работа с острыми углами треугольника) синус и косинус будут положительны.
Но изредка встречаются ***тупые углы*** с величиной $90° < \alpha < 180°$, у которых значения синуса положительно, а косинуса – отрицательно. Если вы не хотите разбираться, почему знаки именно таковы, то лучше их просто как-нибудь запомнить.
Вместе с тем, этот вопрос будет все-таки обсужден позже, в задании B15.

5) Как вы, наверное, заметили, «под знаком» тригонометрической функции стоит угол, который может быть обозначен разными способами: A, α, x, y и так далее.

На этом можно и закончить это Тематическое Отступление, такое краткое и почти приятное по сравнению с некоторыми последующими ☺, и перейти к разбору примеров.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ В8

B8.1. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, УГОЛ B РАВЕН $30°$, $BC = 3\sqrt{3}$. НАЙДИТЕ AC.

Для подобных заданий можно предложить следующий порядок действий.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

На этом этапе нужно нанести на исходный рисунок все то, что дано в условии, и то, что нужно найти. Рекомендую использовать для этого разные цвета (которые очень «оживляют» рисунок и делают его значительно более понятным и полезным для работы).
Для приведенного примера рисунок может быть, например, таким (рис. 8.1).

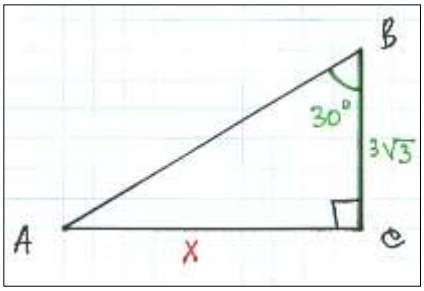


РИСУНОК 8.1

2-Й ЭТАП: ПОИСК НА РИСУНКЕ «ЗАЦЕПКИ» ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО РЕШЕНИЯ (ИЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КАКОГО-НИБУДЬ ТИПОВОГО ПРИЕМА).

В нашем примере видно, что «участвовать» в решении будут угол B, стороны BC и AC (потому, что они либо уже даны, либо должны быть найдены).
Очевидно, лучше всего выбрать такой сценарий:

$\mathrm{tg}30° = \frac{x}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (табличное значение!),

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Как всегда – проверка! Не бросаться же сразу записывать «3» в бланк ответов!
А самая лучшая проверка – это решить задание заново, не подсматривая в первоначальный вариант. Перед этим проверив еще раз правильность записи того, что дано в условии.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

Хорошо, если бы именно такое легкое задание попалось на ЕГЭ!

B8.2. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН 90°, $\cos B = \frac{3}{5}$, AB = 5. НАЙДИТЕ AC.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

Рисунок может, например, получиться таким (рис. 8.2).

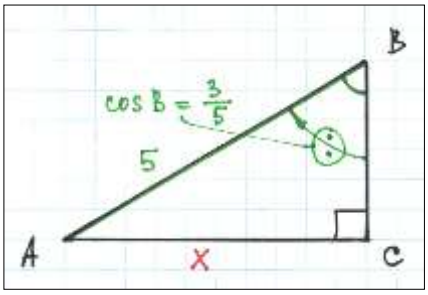


РИСУНОК 8.2

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

В этом, и нескольких других примерах, будет показано применение простого и эффективного приема решения подобных заданий. Назовем его ***«Связкой»***, так как одновременно (в связке) используются два следующих соображения.

Первое: раз треугольник прямоугольный, то можно использовать теорему Пифагора.

Второе: раз в условии дано значение тригонометрической функции (или его нужно найти), то значит, ее нужно расписать через отношение сторон данного в условии треугольника.

В этом примере «Связка» будет выглядеть так:

$\cos B = \frac{3}{5} = \frac{BC}{5}$ (1)

$5^2 = x^2 + BC^2$ (2)

Итак, «Связка» записана. Далее можно использовать, например, такой план действий: из (1) найти BC и подставить в (2).

$$BC = \frac{3 \cdot 5}{5} = 3$$

$$5^2 = x^2 + 3^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16, \qquad x = \pm\sqrt{16}, \qquad x = \pm 4.$$

По смыслу задания подходит только $x = 4$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4							

B8.3. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $AB = 30$, $AC = 6\sqrt{21}$. НАЙДИТЕ $\sin A$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.3).

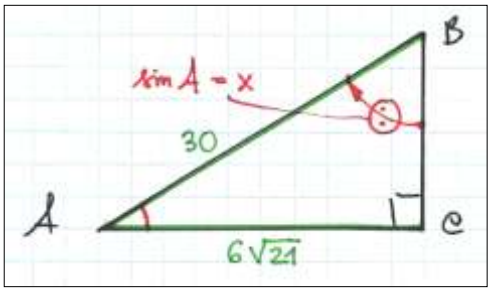


РИСУНОК 8.3

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Применим знакомую «Связку»:

$x = \sin A = \frac{BC}{30}$, то есть $x = \frac{BC}{30}$ (1)

$30^2 = \left(6\sqrt{21}\right)^2 + BC^2$ (2)

После записи «Связки» начинаем думать о дальнейших действиях.
Естественно, напрашивается такой вариант: из (2) найти BC и подставить в (1).

Итак,

$BC^2 = 30^2 - 36 \times 21 = 900 - 756 = 144$

$BC = \pm\sqrt{144} = \pm 12$. Оставляем только $BC = 12$.

$x = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	***,***	***4***					

B8.4. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $AB = 182$, $AC = 70$. НАЙДИТЕ $\mathrm{tg}A$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.4).

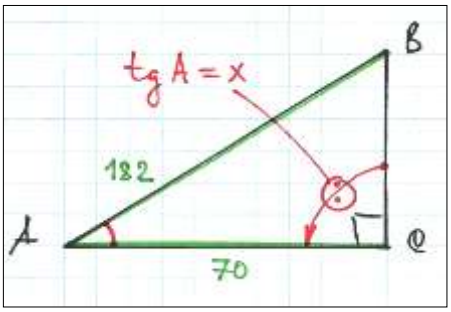


РИСУНОК 8.4

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

$\mathrm{tg}A = x = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BC}}{70}$, то есть $x = \frac{\mathrm{BC}}{70}$ (1)

$182^2 = 70^2 + BC^2$ (2)

Глядя на «Связку», можно предложить два варианта решения.

Вариант А: из (2) найти BC и подставить в (1).

Вариант В: из (1) выразить BC и подставить в (2).

Для показа возможных различий в решении, рассмотрим оба варианта.

Вариант А.

$BC^2 = 182^2 - 70^2 = (182 - 70)(182 + 70) = 112 \cdot 252 = 28224.$

Вот это да! – скажет читатель. И из этого числа еще нужно как-то найти корень!?

Это можно сделать несколькими способами, покажем два из них.

Способ1.

Чтобы не перебирать числа подряд, попробуем поразмышлять.
Проведем грубую прикидку: $150^2 = 22500$, $160^2 = 25600$, $170^2 = 28900$.
Значит, BC больше 160, но меньше 170.

Теперь нужно найти его третью, последнюю цифру.
Для того, чтобы получить $\mathbf{4}$ в конце искомого числа ($2822\mathbf{4}$), эта последнюю цифра должна быть или 2 ($2 \times 2 = \mathbf{4}$), или 8 ($8 \times 8 = 6\mathbf{4}$).
Проверяем: $16\mathbf{2}^2 = 26244$ – недолет, $16\mathbf{8}^2 = 28224$ – то, что надо!

Способ2.

Полученное произведение $BC^2 = 112 \cdot 252$ можно разложить на более мелкие числа и сгруппировать их для удобного вычисления корня:

$BC^2 = 112 \cdot 252 = 56 \cdot 2 \cdot 63 \cdot 2 \cdot 2 = 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 = 49 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4$

$BC = \pm\sqrt{49 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4} = \pm 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \pm 168$

$BC = 168$

Итак, BC найдено, теперь осталось вычислить x: $x = \frac{168}{70} = 2{,}4$.

Уффф! Не знаю как вы, а я уже устал! Но ранее обещанный второй вариант все же посмотрим.

Вариант В.

Подставим $BC = 70x$ в (2), и решим полученное уравнение.

$182^2 = 70^2 + (70x)^2 = 70^2 + 70^2x^2$

$182^2 = 70^2(1 + x^2)$

$$1 + x^2 = \frac{182^2}{70^2} = \frac{182 \cdot 182}{70 \cdot 70} = \frac{91 \cdot 91}{35 \cdot 35} = \frac{13 \cdot 13}{5 \cdot 5} = \frac{169}{25}$$

$$x^2 = \frac{169}{25} - 1 = \frac{169}{25} - \frac{25}{25} = \frac{144}{25}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{144}{25}} = \pm\frac{12}{5} = \pm 2\frac{2}{5} = \pm 2{,}4$$

Оставляем $x = 2{,}4$ как единственно пригодное число.

Вариант В оказался проще – меньше работы с цифрами, но и вариант А при желании одолеть можно!

Кстати, очень многие задания можно решить несколькими способами. Поэтому не нужно судорожно пытаться запомнить какие-то особые рецепты под каждое конкретное задание.

Рисунок, здравый смысл, проверка сделанного и отсутствие спешки всегда выводят на нужный путь!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2	***,***	***4***					

B8.5. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $AB = 30$, $BC = 24$. НАЙДИТЕ $\cos A$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.5).

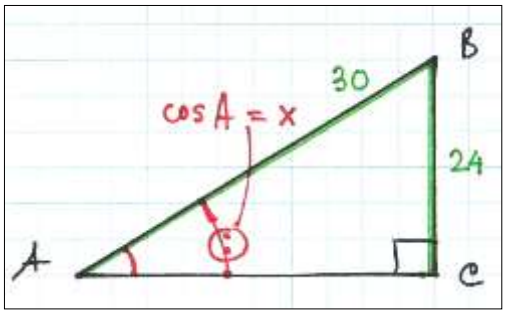


РИСУНОК 8.5

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

$\cos A = x = \frac{AC}{30}$, то есть $x = \frac{AC}{30}$ (1)

$30^2 = 24^2 + AC^2$ (2)

Этот пример напоминает предыдущий, но его мы решим только одним способом: выразим из (1) AC и подставим в (2). На разбор двух способов я уже не согласен ☺!

$$30^2 = 24^2 + (30x)^2 = 24^2 + 30^2x^2$$

$$30^2x^2 = 30^2 - 24^2 = (30-24)(30+24) = 6 \cdot 54$$

$$x^2 = \frac{6 \cdot 54}{30^2} = \frac{6 \cdot 54}{30 \cdot 30} = \frac{1 \cdot 54}{5 \cdot 30} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 9}{5 \cdot 30} = \frac{9}{25}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5} = \pm 0{,}6$$

Оставляем $x = 0{,}6$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	***,***	***6***					

B8.6. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$. НАЙДИТЕ $\sin B$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.6).

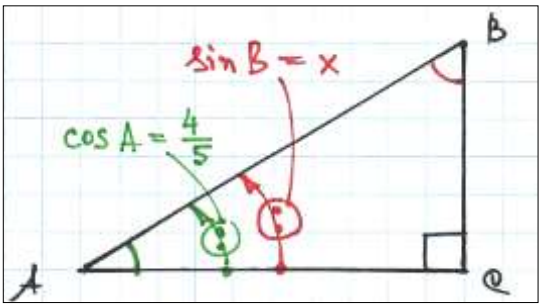


РИСУНОК 8.6

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Из рисунка видно, что искомый $\sin B$ равен $\cos A$, который уже дан в условии. Таким образом,

$$\sin B = \cos A = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Эта задача оказалась гораздо проще, чем можно было предположить.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	***,***	***8***					

B8.7. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН 90°, УГОЛ A РАВЕН 30°. НАЙДИТЕ СИНУС УГЛА BAD.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.7А).

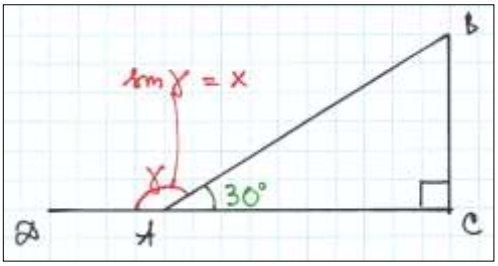


РИСУНОК 8.7а

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Из рисунка видно, что $\angle BAD = 180° - 30° = 150°$.
Таким образом, решение задачи сводится к нахождению значения $\sin 150°$.
Можно предложить два относительно простых способа найти эту величину. Подробно пояснять суть этих способов сейчас нет возможности – не тот формат книжки.
Если подробно расписывать все, что можно пояснить, то получится ощутимо более тяжелое чтиво, и любой «чайник» от него отвернется со справедливым негодованием!

Итак, возможные варианты действий:

1) Применим так называемую ***«формулу приведения»***:
   $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = {}^{1}/_{2} = 0{,}5.$
   Или ее же, но в другом виде:
   $\sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos 60° = {}^{1}/_{2} = 0{,}5.$
   Естественно, результат получается одинаковым.
   Подробнее о том, что такое формулы приведения, рассказано в задании B7.
2) Воспользуемся тем, что синус угла равен вертикальной координате вращаемой на единичной окружности точки. Тогда станет понятно следующее: $\sin 150° = \sin 30° = 0{,}5$ (рис. 8.7б).

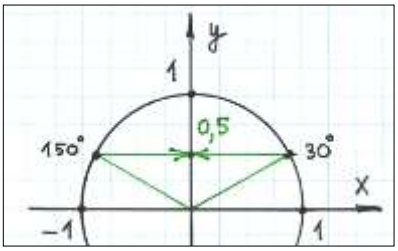


РИСУНОК 8.7б

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	***,***	***5***					

B8.8. В РАВНОБЕДРЕННОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC С ОСНОВАНИЕМ AC БОКОВАЯ СТОРОНА AB РАВНА 5, А ВЫСОТА, ПРОВЕДЕННАЯ К ОСНОВАНИЮ, РАВНА $2\sqrt{6}$. НАЙДИТЕ КОСИНУС УГЛА A.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.8).

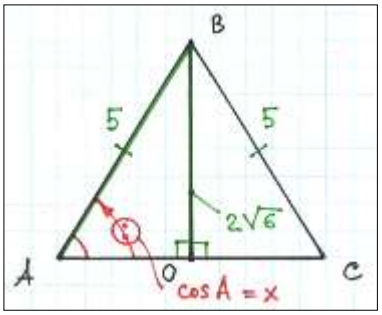


РИСУНОК 8.8

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Предложенную задачу можно решить, по крайней мере, двумя способами.

Способ 1.

$$\cos A = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{5}$$

По теореме Пифагора для треугольника AOB:

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 25 - 24 = 1$$

$AO = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$ Выбираем значение $AO = 1.$

Таким образом, $\cos A = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Способ 2.

$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1;$ $\sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$(\cos A)^2 = 1 - (\sin A)^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25},$ и $\cos A = \pm\sqrt{\frac{1}{25}}$

Выбираем $\cos A = +\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ (косинус острого угла положителен).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	***,***	***2***					

B8.9. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. НАЙДИТЕ BC.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.9).

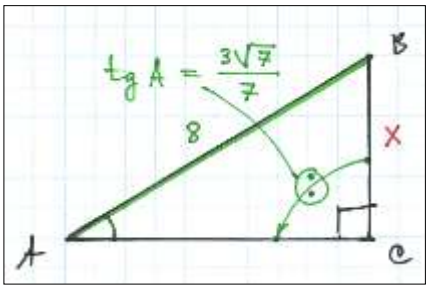


РИСУНОК 8.9

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{AC} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \quad (1)$$

$$8^2 = x^2 + AC^2 \quad (2)$$

Найдем AC из (1) и подставим в (2):

$$AC = \frac{7x}{3\sqrt{7}}$$

$$8^2 = x^2 + \left(\frac{7x}{3\sqrt{7}}\right)^2 = x^2 + \frac{7^2 \cdot x^2}{9 \cdot 7} = x^2 + \frac{7 \cdot x^2}{9} = x^2\left(1 + \frac{7}{9}\right) = x^2\left(\frac{9}{9} + \frac{7}{9}\right) = \frac{16x^2}{9}$$

$$8^2 = \frac{16x^2}{9}$$

$$16x^2 = 8^2 \cdot 9$$

$$x^2 = \frac{8 \cdot 8 \cdot 9}{16} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

$x = \pm 6$. Выбираем, естественно, $x = 6$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

$$\operatorname{tg} A = \frac{x}{AC} = \frac{6}{\sqrt{8^2 - 6^2}} = \frac{6}{\sqrt{28}} = \frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Именно так и должно быть по условию задания.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6							

А теперь, завершая тему треугольников, в качестве отдыха после долгих трудов, рассмотрим что-нибудь совсем простое.

B8.10. ОДИН ОСТРЫЙ УГОЛ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА НА 30° БОЛЬШЕ ДРУГОГО. НАЙДИТЕ БОЛЬШИЙ ОСТРЫЙ УГОЛ.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 8.10).

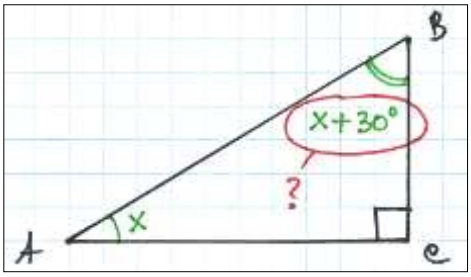


РИСУНОК 8.10

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Сумма углов любого треугольника равна $180°$. Применительно к нашему случаю это означает, что

$x + (x + 30) + 90 = 180$

$2x + 120 = 180$

$2x = 60$

$x = 30$

Таким образом, меньший угол равен $30°$. А больший угол равен $30° + 30° = 60°$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6	***0***						

А теперь рассмотрим довольно распространенную задачу, в которой участвует окружность.

B8.11. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ НА 36° БОЛЬШЕ ОСТРОГО ВПИСАННОГО УГЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА ТУ ЖЕ ДУГУ ОКРУЖНОСТИ. НАЙДИТЕ ВПИСАННЫЙ УГОЛ. ОТВЕТ ДАЙТЕ В ГРАДУСАХ (РИС. 8.11) .

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

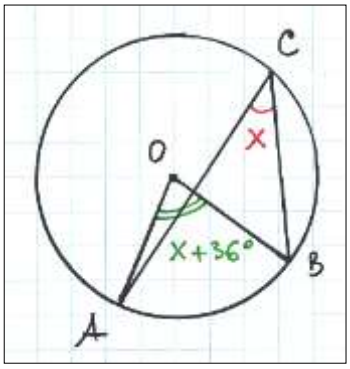


РИСУНОК 8.11

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Некоторая часть заданий B8 так или иначе связана с углами внутри окружности.
Как правило, один из этих углов «центральный» (то есть его вершина находится в центре окружности), а другой угол «вписанный» (его вершина находится на самой окружности).
Если оба этих угла своими сторонами опираются на одну и ту же дугу окружности (в этой задаче – меньшую дугу между точками A и B), то величина центрального угла всегда в 2 раза больше, чем вписанного. Пожалуй, это и все, что нужно знать для решения подобных заданий.

Итак, для рассматриваемых здесь углов выполняется соотношение:

$x + 36 = 2x$

$2x - x = 36$

$x = 36$

Это значение и будет величиной вписанного угла.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

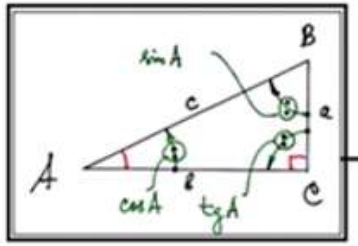
4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	***6***						

Основные советы по выполнению заданий B8:

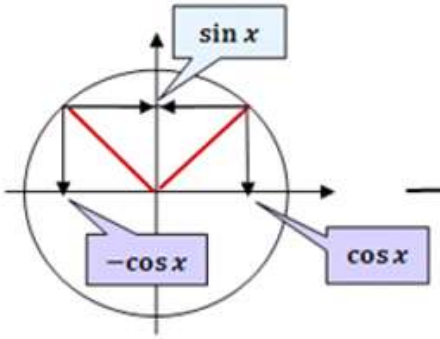
- Обязательно составляйте рисунок по условию задачи (если он отсутствует) и работайте с ним, используя различные цвета;
- Запомните соотношение величин центрального и вписанного в окружность углов, опирающихся на одну и ту же дугу (центральный – в 2 раза больше);
- Запомните значения синуса, косинуса и тангенса для «особых» углов 1-ой четверти (таблица с их значениями приведена в Тематическом Отступлении);
- В задачах «на прямоугольный треугольник» используйте типовой прием «Связка» (его применение показано выше);
- Производя преобразования и вычисления, делайте это рационально. Своевременно сокращайте числа там, где это возможно. Избегайте ненужного умножения и возведения в квадрат, приводящих к появлению слишком больших чисел;
- Извлекая корень из больших чисел, используйте способы, показанные в задании B8.4. Не тратьте силы на ненужное запоминание таблицы квадратов двузначных чисел;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

А напоследок законспектируем пройденную главу обычной (или необычной?) картинкой.



ф-ция	30°	45°	60°
sinα	1/2	√2/2	√3/2
cosα	√3/2	√2/2	1/2
tgα	1/√3	1	√3
ctgα	√3	1	1/√3

$(sin\,x)^2 + (cos\,x)^2 = 1$



помнить — **B8** — **этапы**

- Работа с рисунком
- «Связка»
  - т. Пифагора
  - $sin(cos, tg) = \cdots$
- Вычисления
- Проверка

ЗАДАНИЕ B10

Задания B10, за редким исключением, являются обычными задачами из плоской геометрии (типа B8), только «замаскированными» под задания B13. Иными словами, работать в «десятке» приходится не с самими объемными фигурами, данными в условии, а с их плоскими фрагментами. Как правило – с прямоугольными треугольниками.

Основным условием их успешного и простого решения является, опять же, работа с рисунком. Что она собой представляет, уже подробно обсуждалось в задании B8.

B10.1. В ПРАВИЛЬНОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЕ $SABCD$ ТОЧКА O – ЦЕНТР ОСНОВАНИЯ, S - ВЕРШИНА, $SO = 54$, $AC = 144$. НАЙДИТЕ БОКОВОЕ РЕБРО SB.

Для подобных заданий можно предложить следующий порядок действий.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

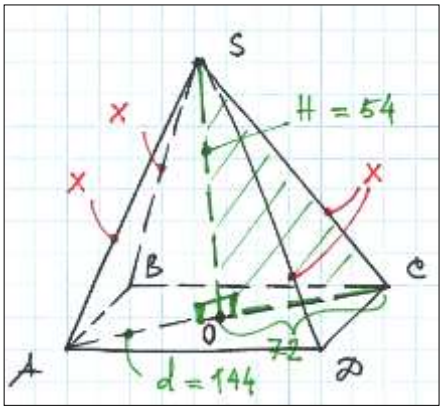


РИСУНОК 10.1

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Данная в условии пирамида прямая и правильная. Следовательно, в ее основании лежит квадрат, и все ее боковые ребра равны. Поэтому, для удобства работы с получившимся рисунком, вместо нахождения ребра SB, найдем равное ему ребро SC.

Применим теорему Пифагора к заштрихованному треугольнику:

$$x^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 54^2 + 72^2$$

Для того, чтобы не связываться с большими числами, воспользуемся таким приемом вычисления:

$$x^2 = 54 \cdot 54 + 72 \cdot 72 = 6 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 9 = 81 \cdot 36 + 81 \cdot 64 = 81(36 + 64) = 81 \cdot 100$$

$$x = \pm\sqrt{81 \cdot 100} = \pm 9 \cdot 10 = \pm 90$$

$$x = 90$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

9	***0***						

B10.2. В ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЕ $SABC$ ТОЧКА M – СЕРЕДИНА РЕБРА AB, S – ВЕРШИНА. ИЗВЕСТНО, ЧТО $SM = 4$, А ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ РАВНА 18. НАЙДИТЕ ДЛИНУ РЕБРА AC.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

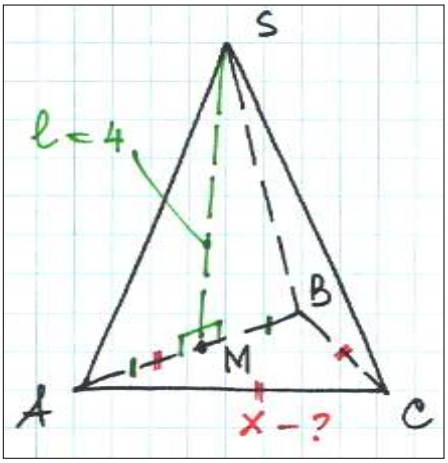


РИСУНОК 10.2

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В условии дана боковая площадь пирамиды $(S_{бок} = 18)$.
Запишем ее формулу применительно к нашему рисунку: она равна сумме площадей трех одинаковых боковых граней. Каждая из них, в свою очередь, равна

$$S = S_{ABS} = \frac{1}{2}xl$$

Таким образом,

$$S_{бок} = 3S = \frac{3xl}{2} = 18$$

$$3xl = 36$$

$$xl = 12$$

$$x = \frac{12}{l} = \frac{12}{4} = 3$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

B10.3. В ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЕ $SABC$ МЕДИАНЫ ОСНОВАНИЯ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ТОЧКЕ O. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА ABC РАВНА 7, ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ РАВЕН 21. НАЙДИТЕ ДЛИНУ ОТРЕЗКА OS.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

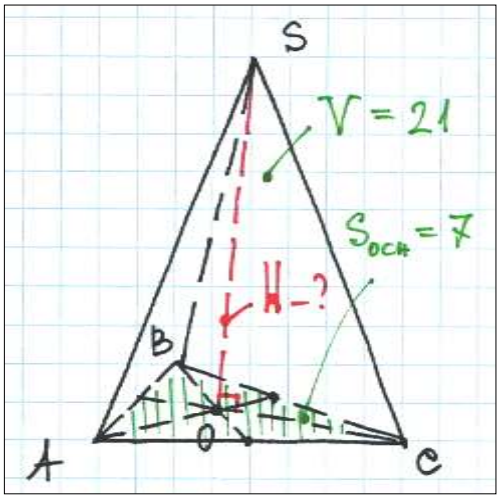


РИСУНОК 10.3

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Из условия следует, что отрезок OS является высотой (именно высота опускается из вершины пирамиды в точку пересечения медиан основания).

Кроме того, в условии дается объем пирамиды. Запишем его формулу:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$$

Из нее и найдем значение H.

$$S_{\text{осн}} H = 3V$$

$$H = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot 21}{7} = 9$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

9							

B10.4. ДИАМЕТР ОСНОВАНИЯ КОНУСА РАВЕН 10, А ДЛИНА ОБРАЗУЮЩЕЙ РАВНА 13. НАЙДИТЕ ВЫСОТУ КОНУСА.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

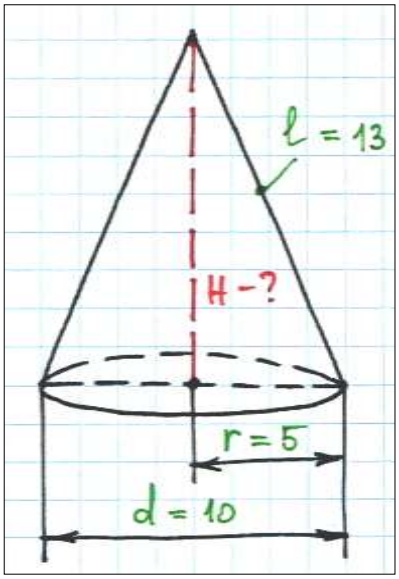


РИСУНОК 10.4

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Из прямоугольного треугольника со сторонами H, l, r по теореме Пифагора найдем H:

$l^2 = H^2 + r^2$

$13^2 = H^2 + 5^2$

$H^2 = 13^2 - 5^2 = (13-5)(13+5) = 8 \cdot 18 = 144$

$H = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

$H = 12$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***2***						

B10.5. В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ИЗВЕСТНО, ЧТО $BD_1 = \sqrt{29}$, $BB_1 = 3$, $A_1D_1 = 4$. НАЙДИТЕ ДЛИНУ РЕБРА AB.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

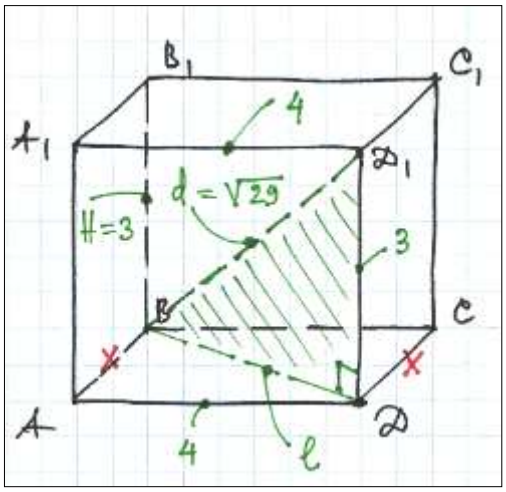


РИСУНОК 10.5

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В условии задачи дано значение диагонали параллелепипеда d. Выразим ее через другие элементы параллелепипеда. Из заштрихованного треугольника видно, что

$$d^2 = 3^2 + l^2 = 3^2 + (x^2 + 4^2)$$

Теперь остается только решить полученное уравнение:

$$29 = 3^2 + (x^2 + 4^2)$$

$$29 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x = 2$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2							

B10.6. В ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЕ $SABC$ R – СЕРЕДИНА РЕБРА BC, S – ВЕРШИНА. ИЗВЕСТНО, ЧТО $SR = 16$, А ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАВНА 168. НАЙДИТЕ ДЛИНУ ОТРЕЗКА AB.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

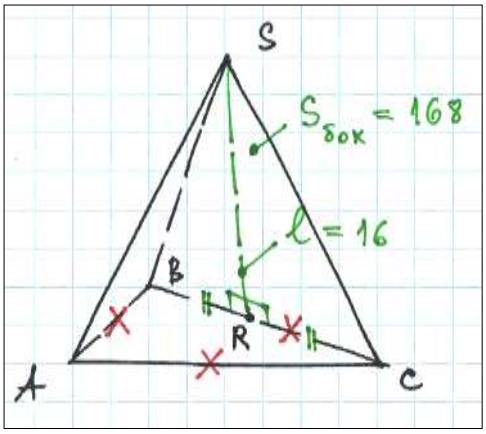


РИСУНОК 10.6

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку в условии задачи дано значение площади боковой поверхности пирамиды, начнем решение с «расписывания» этой формулы.

$S_{бок}$ равна сумме площадей 3-х одинаковых боковых граней пирамиды:

$$S_{бок} = 3S_{треуг} = 3S_{BSC} = 3 \cdot \frac{xl}{2} = \frac{3x \cdot 16}{2} = 24x$$

По условию известно, что $S_{бок} = 168$. Таким образом,

$$24x = 168$$

$$x = \frac{168}{24} = \frac{84}{12} = \frac{42}{6} = 7$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

7							

B10.7. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА РАВНА 72π, А ДИАМЕТР ОСНОВАНИЯ – 9. НАЙДИТЕ ВЫСОТУ ЦИЛИНДРА.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

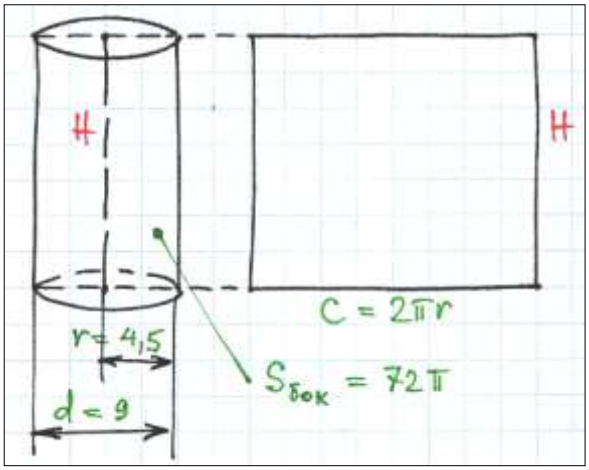


РИСУНОК 10.7

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку в условии задачи дано значение площади боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}}$, начнем решение с «расписывания» этой формулы.

Если мысленно развернуть цилиндр, то станет понятно: его боковая поверхность – это прямоугольник, длина которого равна длине окружности (рис. 10.7).

$$S_{\text{бок}} = CH = 2\pi rH = 2 \cdot 4{,}5\pi H = 9\pi H = 72\pi$$

$$9\pi H = 72\pi$$

$$H = \frac{72\pi}{9\pi} = 8$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

8							

B10.8. В ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЕ $SABC$ МЕДИАНЫ ОСНОВАНИЯ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ТОЧКЕ K. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ РАВЕН 70, $KS = 21$. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА ABC.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

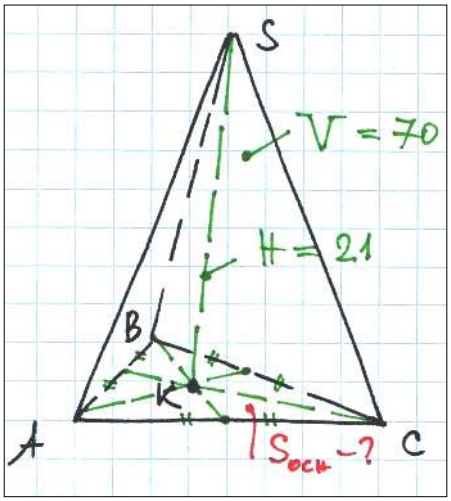


РИСУНОК 10.8

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Пирамида правильная, значит отрезок KS является высотой пирамиды.

Поскольку в условии задачи дано значение объема пирамиды $(V_{\text{пир}} = 70)$, начнем решение с «расписывания» этой формулы.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{S_{\text{осн}} \cdot 21}{3} = 7S_{\text{осн}} = 70$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{70}{7} = 10$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***0***						

Вот такие они, примерно одинаковые и весьма простые – задания B10.
Успехов вам в их решении, а заодно и в решении всего «геометрического блока»!

Основные советы по выполнению заданий B10:

- Обязательно составляйте рисунок по условию задачи (если он отсутствует) и работайте с ним, используя различные цвета;
- Начинать решение задач B10 в большинстве случаев удобно с расписывания формулы объема фигуры (площади фигуры, диагонали фигуры), данной в условии. В этом уравнении и будет содержаться величина, которую в дальнейшем необходимо найти;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

ЗАДАНИЕ B13

Объемные геометрические фигуры. Именно с ними предстоит встретиться в Задании B13 экзамена. В этих заданиях обычно упоминаются два типа фигур: ***«усеченные»*** (конус и пирамида) и ***«неусеченные»*** (цилиндр, призма, прямоугольный параллелепипед). Довольно редко в подобных задачах можно встретить и шар.

Практически все задания B13 довольно просты. И не требуют сверхусилий для решения, вопреки мнению некоторой части учащихся. Но, как всегда, только при правильном подходе к ним.

Для их успешного решения обязательно нужно отразить суть задачи на одном или двух рисунках. Как правило, первый, объемный рисунок нужен для общего представления. Но часто его бывает недостаточно, так как некоторые «дорисовки» на нем делать неудобно. Именно поэтому очень полезно использовать дополнительные рисунки. Например, рисунок основания фигуры, или вид фигуры сверху или сбоку.

Понятно, что действительно красивые и правильные рисунки бывают только в книжках.
Такие рисунки получаются лишь у немногих (у меня, например, до сих пор не получаются).
Но это и не важно! Лишь бы они помогали в работе. Некоторые рисунки неизбежно будут неудачными, и это нормально. Спокойно зачеркиваем их и делаем другие. Не рассчитывайте, что кто-то на экзамене за вас сделает красивый рисунок, да еще и с первого раза!

Какие бы плохие навыки рисования у вас ни были, в процессе самостоятельного решения десятка задач они заметно улучшатся. И уж для выполнения B13 станут вполне достаточными!

Как вы, наверное, уже убедились, многие справочники и различные пособия предлагают поистине огромное количество разных формул по геометрии. Как простых, так и довольно сложных. Заучивать их подряд, без разбора, категорически не следует – это бесполезная трата сил и времени, только еще больше увеличивающая раздражение от вашей, и без того любимой, математики ☺.

Для успешного решения заданий B13 вполне достаточно помнить следующее:

- ✓ Объем любой «обычной» фигуры $\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H}}$;
- ✓ Объем любой усеченной фигуры $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot \text{H}}$, то есть в 3 раза меньше, чем «обычной» фигуры при прочих равных условиях (то есть при тех же $S_{\text{осн}}$ и H);
- ✓ Длина окружности $\boldsymbol{C = 2\pi r}$;
- ✓ Площадь круга $\boldsymbol{S = \pi r^2}$;
- ✓ Площадь боковой поверхности конуса $\boldsymbol{S = \pi r l}$ (где l – длина образующей конуса);
- ✓ Объем шара $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$, площадь шара (на всякий случай) $\boldsymbol{S = 4\pi r^2}$;
- ✓ Формулы площадей квадрата, прямоугольника и треугольника (которые уже встречались в задании B8);
- ✓ Теорему Пифагора (обсуждалась ранее в задании B8).

Как вы сможете в дальнейшем убедиться, ничем другим при решении задач B13 я пользоваться не буду. А теперь, не тратя времени на ненужную теорию, займется примерами…

B13.1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ОПИСАН ОКОЛО СФЕРЫ РАДИУСА $0,5$. НАЙДИТЕ ЕГО ОБЪЕМ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.1)

Вписывать сферу в параллелепипед (или, что то же самое – описывать параллелепипед вокруг сферы) на объемном рисунке трудно. Поэтому сделаем это на дополнительном рисунке 13.1б (это будет вид сверху или сбоку – они выглядят одинаково). Очевидно, что упомянутый параллелепипед является кубом, раз он описан около сферы.

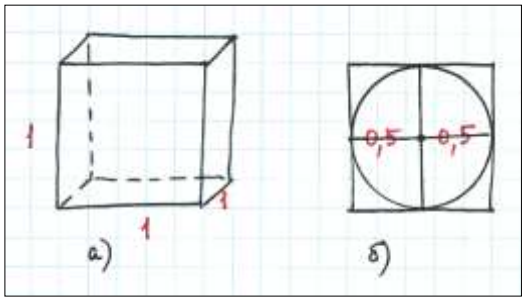


РИСУНОК 13.1

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Видно, что все ребра этого куба (то есть его длина, ширина и высота) равны $0,5 + 0,5 = 1$. Таким образом, искомый объем параллелепипеда равен

$$V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1							

B13.2. ЦИЛИНДР И КОНУС ИМЕЮТ ОБЩЕЕ ОСНОВАНИЕ И ОБЩУЮ ВЫСОТУ. ВЫЧИСЛИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, ЕСЛИ ОБЪЕМ КОНУСА РАВЕН 27.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.2).

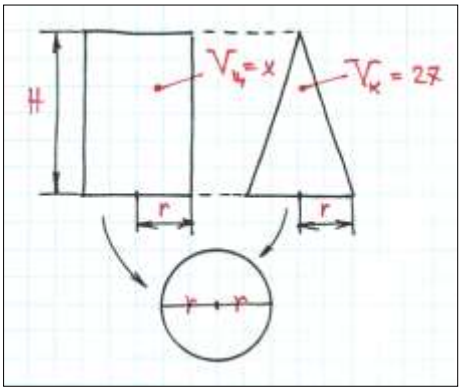


РИСУНОК 13.2

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В тех случаях, когда в задачах идет описание (сравнение) ***двух фигур***, удобен следующий прием: нужно составить ***систему уравнений***, в которой каждое из уравнений описывает одну из фигур (в данном случае – уравнения описывают их объемы, поскольку именно они даны в условии).

$V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = x$ – цилиндр (1)

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = 27$ – конус (2)

Разделим одно уравнение на другое (левую часть на левую, и правую на правую).
Например, (1) на (2):

$$\frac{1 S_{\text{осн}} \cdot \text{H}}{\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot \text{H}} = \frac{x}{27}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{x}{27};$$

$$x = \frac{27 \cdot 3}{1} = 81$$

Внимание! Эту задачу можно решить и с помощью простого рассуждения.
Поскольку площадь основания и высота цилиндра и конуса равны, то их объемы отличаются в 3 раза (объем цилиндра больше). Таким образом, объем цилиндра равен $27 \cdot 3 = 81$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

8	***1***						

B13.3. В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ УРОВЕНЬ ЖИДКОСТИ РАВЕН 9 СМ. НА КАКОЙ ВЫСОТЕ БУДЕТ НАХОДИТЬСЯ УРОВЕНЬ ЖИДКОСТИ, ЕСЛИ ЕЕ ПЕРЕЛИТЬ ВО ВТОРОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СОСУД, ДИАМЕТР КОТОРОГО В 3 РАЗА БОЛЬШЕ ДИАМЕТРА ПЕРВОГО? ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В САНТИМЕТРАХ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.3).

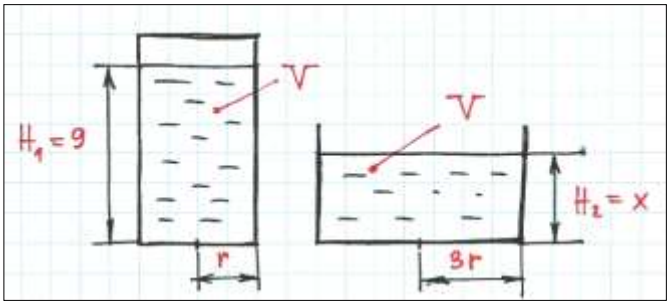


РИСУНОК 13.3

Понятно, что радиусы сосудов (как и диаметры) также отличаются в 3 раза.
Для решения задачи будем использовать формулы, содержащие именно радиусы, а не диаметры. Просто потому, что эти формулы более привычны.

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Очевидно, что объем воды при переливании не меняется, и он в обоих цилиндрах одинаков: $V_1 = V_2$. Можно составить систему уравнений, как в предыдущей задаче, а можно просто приравнять объемы «водяных цилиндров». Что мы, для разнообразия, и сделаем:

$V_1 = V_2$

$S_{\text{осн}1} \cdot 9 = S_{\text{осн}2} \cdot x$

$\pi r^2 \cdot 9 = \pi (3r)^2 \cdot x$

$\pi r^2 \cdot 9 = \pi 9 r^2 \cdot x$

$x = 1$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1							

B13.4. ШАР ОБЪЕМОМ 8 м^3 ВПИСАН В ЦИЛИНДР. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА (В м^3).

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.4).

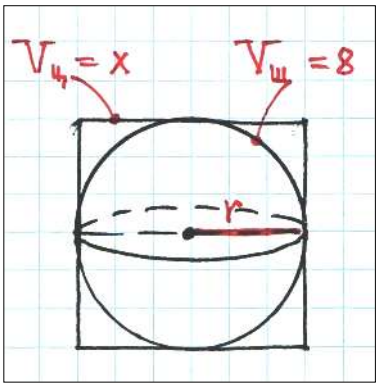


РИСУНОК 13.4

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В этом случае опять удобнее всего решить задачу «способом системы уравнений»:

$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 8$ – шар (1)

$V_{\text{ц}} = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = \pi r^2 \cdot 2r = x$ – цилиндр (2)

Разделим одно уравнение на другое. Например, (2) на (1):

$$\frac{\pi r^2 \cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r \cdot 3}{4\pi r^3} = \frac{x}{8}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{8}$$

$$x = \frac{8 \cdot 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***2***						

B13.5. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА РАВЕН 1 СМ^3. РАДИУС ОСНОВАНИЯ УМЕНЬШИЛИ В 2 РАЗА, А ВЫСОТУ УВЕЛИЧИЛИ В 3 РАЗА. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ПОЛУЧИВШЕГОСЯ ЦИЛИНДРА. ОТВЕТ ДАЙТЕ В СМ^3.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.5).

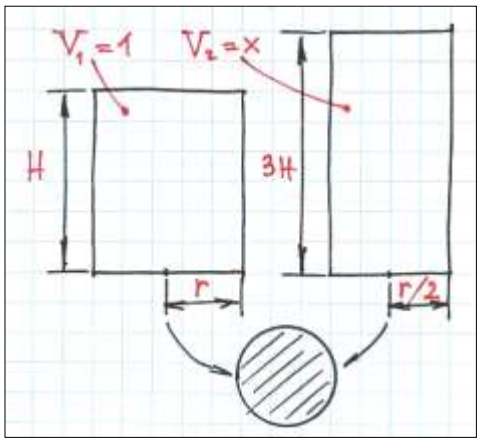


РИСУНОК 13.5

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

$$V_1 = S_{\text{осн}1} \cdot \text{H}_1 = \pi r^2 \text{H} = 1 \qquad (1)$$

$$V_2 = S_{\text{осн}2} \cdot \text{H}_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 3\text{H} = \frac{3\pi r^2 \text{H}}{4} = x \qquad (2)$$

Разделим одно уравнение на другое. Например, (2) на (1):

$$\frac{\frac{3}{4}\pi r^2 \text{H}}{\pi r^2 \text{H}} = \frac{3\pi r^2 \text{H}}{4\pi r^2 \text{H}} = \frac{3}{4} = \frac{x}{1}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{1 \cdot 3}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	***,***	***7***	***5***				

B13.6. В ОСНОВАНИИ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ ЛЕЖИТ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК С КАТЕТАМИ 7 И 8. БОКОВЫЕ РЕБРА РАВНЫ $\frac{8}{\pi}$. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, ОПИСАННОГО ОКОЛО ЭТОЙ ПРИЗМЫ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.6).

На объемном рисунке трудно показать цилиндр, описанный около (то есть «снаружи») призмы. Но это легко показать на дополнительном рисунке 13.6б (вид сверху).

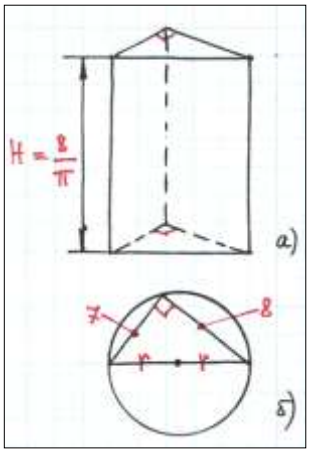


РИСУНОК 13.6

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

И опять в условии даны две фигуры, однако ни у одной из них не известен ни объем, ни площадь. Поэтому составлять систему уравнений, как в предыдущих задачах, будет не удобно!

В подобных случаях лучше сразу же расписать искомую величину (здесь – это объем цилиндра):

$$V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = \pi r^2 \cdot \frac{8}{\pi} = 8r^2$$

По теореме Пифагора (рис. 13.6б) найдем r^2 для подстановки в это уравнение:

$$(2r)^2 = 7^2 + 8^2$$

$$4r^2 = 49 + 64 = 113; \quad r^2 = \frac{113}{4}$$

Таким образом, объем цилиндра

$$V = 8 \cdot \frac{113}{4} = 2 \cdot 113 = 226$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	***2***	***6***					

B13.7. КУБИК ВЕСИТ 800 Г. СКОЛЬКО ГРАММОВ БУДЕТ ВЕСИТЬ КУБИК, РЕБРО КОТОРОГО В 2 РАЗА МЕНЬШЕ, ЧЕМ РЕБРО ПЕРВОГО КУБИКА, ЕСЛИ ОБА КУБИКА ИЗГОТОВЛЕНЫ ИЗ ОДИНАКОВОГО МАТЕРИАЛА?

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.7).

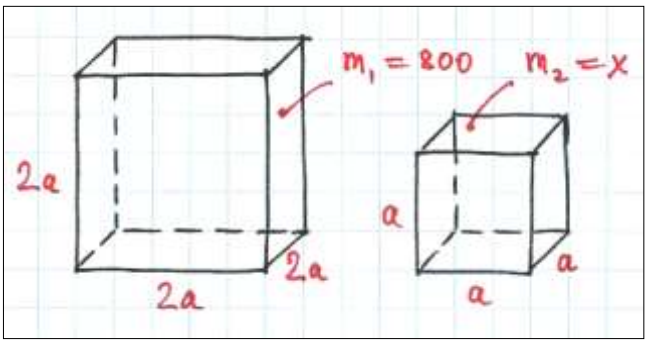


РИСУНОК 13.7

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку здесь речь идет о массе, придется «привлечь» из физики не такую уж сложную формулу $m = \rho V$, где ρ – это плотность материала (она одинакова по условию).

А можно и обойтись без этой формулы – если вы понимаете, что массы этих кубиков будут относиться также, как их объемы. И действительно, как будет видно ниже, плотность ρ просто сократится при делении уравнений, поскольку у кубинков она одинакова.

И опять окажется полезной система уравнений:

$$m_1 = \rho V_1 = \rho(2\text{a})^3 = 8\rho\text{a}^3 = 800 \qquad (1)$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho\text{a}^3 = x \qquad (2)$$

Разделим (1) уравнение на (2):

$$\frac{8\rho\text{a}^3}{\rho\text{a}^3} = \frac{8}{1} = \frac{800}{x}$$

$$x = \frac{800 \cdot 1}{8} = 100$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***0***	***0***					

B13.8. БИЛЬЯРДНЫЙ ШАР ВЕСИТ 360 Г. СКОЛЬКО ГРАММОВ БУДЕТ ВЕСИТЬ ШАР ВДВОЕ МЕНЬШЕГО РАДИУСА, СДЕЛАННОГО ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА?

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.8).

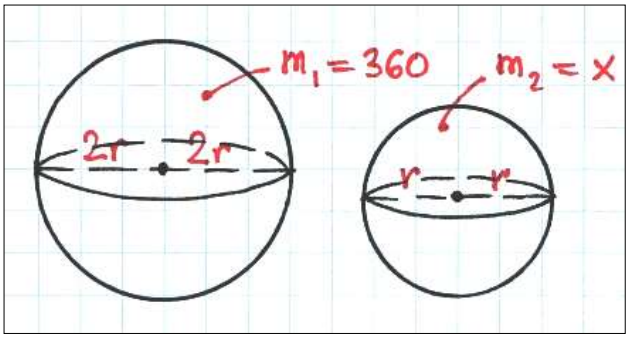


РИСУНОК 13.8

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

И опять о массах, на этот раз шаров:

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Привычно составляем систему уравнений:

$$m_1 = \rho V_1 = \frac{4\rho\pi(2r)^3}{3} = 360 \qquad (1)$$

$$m_2 = \rho V_2 = \frac{4\rho\pi r^3}{3} = x \qquad (2)$$

Разделим (1) уравнение на (2):

$$\frac{4\rho\pi(2r)^3}{4\rho\pi r^3} = \frac{(2r)^3}{r^3} = \frac{8r^3}{r^3} = \frac{8}{1} = \frac{360}{x}$$

Тогда

$$x = \frac{360 \cdot 1}{8} = \frac{360}{8} = \frac{180}{4} = \frac{90}{2} = 45$$

Внимание!

Эту, и подобные ей задачи можно решать проще, используя для этого следующее ***Правило***:

a) Если размер ***каждой стороны*** плоской фигуры увеличить (уменьшить) в N раз, то ее ***площадь*** увеличится (уменьшится) в N^2 раз;

b) Если размер ***каждой стороны*** объемной фигуры увеличить (уменьшить) в N раз, то ее ***объем*** увеличится (уменьшится) в N^3 раз.

Пример 1. Если сторону равностороннего треугольника увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в $3^2 = 9$ раз.

Пример 2. Если сторону квадрата уменьшить в 2 раза, то его площадь уменьшится в $2^2 = 4$ раз.

Пример 3. Если радиус шара увеличить в 4 раза, то его объем увеличится в $4^3 = 64$ раз.

Пример 4. Если сторону правильного тетраэдра (правильной четырехгранной пирамиды) уменьшить в 2 раза, то его объем уменьшится в $2^3 = 8$ раз.

Таким образом, для нашей задачи рассуждение будет таково:
«Поскольку радиус шара уменьшился в 2 раза, то его объем уменьшился в $2^3 = 8$ раз. Следовательно, его масса также уменьшится в 8 раз, и станет равной $360 : 8 = 45$ г». Вот и все!

Кстати, так же можно было решить и задачу B13.7. Кроме того, это правило можно было применить для нахождения отношения площадей $S_{\text{осн}}$ в задаче B13.5 (вместо их подробного расписывания и последующего сокращения), и других подобных случаях.

Это ***Правило*** явно стоит того, чтобы с ним как следует разобраться!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4	***5***						

B13.9. В ОСНОВАНИИ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ ЛЕЖИТ КВАДРАТ СО СТОРОНОЙ 10. БОКОВЫЕ РЕБРА РАВНЫ $\frac{3}{\pi}$. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, ОПИСАННОГО ОКОЛО ЭТОЙ ПРИЗМЫ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.9).

И опять нужно грамотно подойти к рисованию: на объемном рисунке сложно показывать призму внутри цилиндра. Но на дополнительном это сделать проще простого. Вид сверху на эти фигуры представлен на рис. 13.9б.

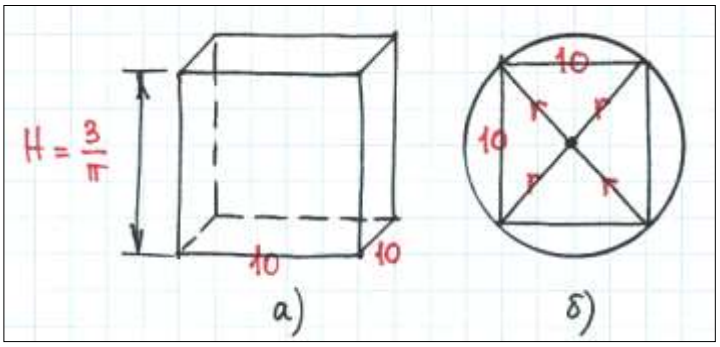


РИСУНОК 13.9

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В этой задаче, подобно задаче B13.6, составлять систему уравнений не будем.
По той же самой причине. Сразу запишем объем искомого цилиндра:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = \pi r^2 \cdot \frac{3}{\pi} = 3r^2.$$

По теореме Пифагора (рис. 11.9б) найдем r^2:

$$(2r)^2 = 10^2 + 10^2$$

$$4r^2 = 200$$

$$r^2 = \frac{200}{4} = 50$$

Таким образом, объем цилиндра $V = 3r^2 = 3 \cdot 50 = 150.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***5***	***0***					

B13.10. ОБЪЕМ ДАННОГО ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА РАВЕН 2 СМ^3. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА, РЕБРО КОТОРОГО В 3 РАЗА БОЛЬШЕ РЕБРА ДАННОГО ТЕТРАЭДРА. ОТВЕТ ДАЙТЕ В СМ^3.

Внимание! Правильной называется объемная фигура, основанием которой является равносторонний треугольник, квадрат, и так далее (то есть все стороны в этих основаниях равны).

1-Й ЭТАП: ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭТОЙ ЗАДАЧИ ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ПРАВИЛОМ, ОПИСАННЫМ ВЫШЕ.

«Поскольку ребро тетраэдра увеличилось в 3 раза, то его объем увеличится в $3^3 = 27$ раз.
И станет равным $2 \cdot 27 = 54$. Ответ: 54».

Просто? Проще не бывает!!!

Если вы попробуете решить эту задачу обычным способом (и сравните затраченные усилия), то вы в полной мере оцените выгоду применения обсужденного выше ***Правила***.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	***4***						

И, напоследок, решим еще одну задачку. На этот раз она будет связана с конусом.

B13.11. РАДИУС ОСНОВАНИЯ ПЕРВОГО КОНУСА В 2 РАЗА МЕНЬШЕ, ЧЕМ РАДИУС ОСНОВАНИЯ ВТОРОГО КОНУСА, А ОБРАЗУЮЩАЯ ПЕРВОГО КОНУСА В 3 РАЗА БОЛЬШЕ, ЧЕМ ОБРАЗУЮЩАЯ ВТОРОГО. ЧЕМУ РАВНА ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО КОНУСА, ЕСЛИ ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО РАВНА 22 см^2. ОТВЕТ ДАЙТЕ В см^2.

А вот задача с новым, еще не встречавшимся понятием – **«образующая»** конуса (на рис. 13.11 она обозначена как l и $3l$).
Кроме того, здесь упоминается площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{б кон}}$.

Вывод формулы $S_{\text{б кон}}$ я здесь не привожу – многим все-равно это покажется сложным для самостоятельного повторения. И поэтому я рекомендую ее «просто запомнить».
Итак: $\boldsymbol{S_{\text{б кон}} = \pi r l}$ (где r – радиус основания конуса, l – длина его образующей).

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 13.11).

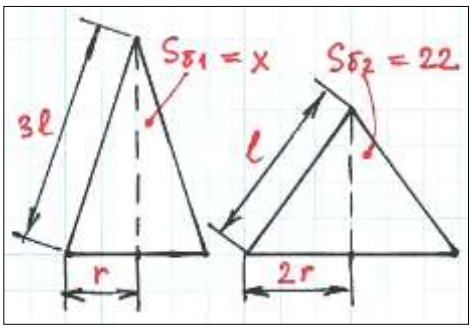


РИСУНОК 13.11

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку в задаче идет речь о площади боковой поверхности двух конусов, распишем их формулы и сведем в систему уравнений:

$S_{\text{б кон1}} = \pi \cdot r \cdot 3l = x$ (1)

$S_{\text{б кон2}} = \pi \cdot 2r \cdot l = 22$ (2)

Разделим одно уравнение на другое. Например, (1) на (2):

$$\frac{\pi r \cdot 3l}{\pi \cdot 2rl} = \frac{3}{2} = \frac{x}{22}$$

$$x = \frac{22 \cdot 3}{2} = 33$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3	***3***						

Задания B13 экзамена, судя по материалам «Открытого банка заданий по математике», могут быть довольно разнообразными, но основной подход к их решению уже понятен из рассмотренных примеров.

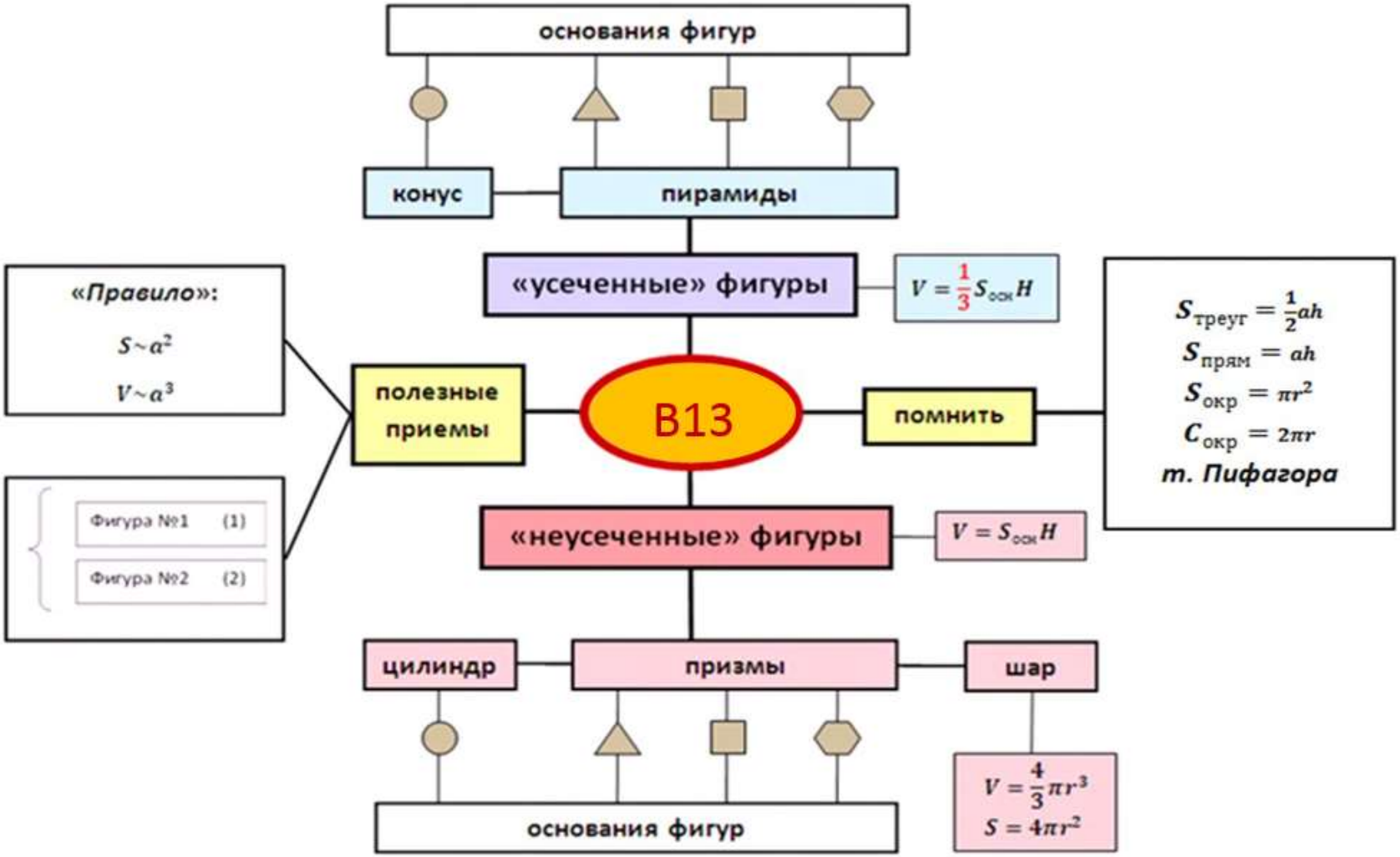
Основные советы по выполнению заданий B13:

- Уясните и запомните – какие именно фигуры стоят за названиями «пирамида, призма, тетраэдр, цилиндр, конус, параллелепипед …»;
- Уясните и запомните смысл понятий «грань, ребро, образующая конуса, высота фигуры, вершина фигуры, основание фигуры, площадь основания, площадь боковой поверхности …»;
- Не пытайтесь запоминать многочисленные и лишние формулы из учебников и справочников. Вам достаточно только тех формул, которые приведены во вступлении к заданию B13;
- Обязательно составляйте рисунки к задачам (как объемные, обзорные, так и дополнительные) и работайте с ними, используя различные цвета;
- Во всех подходящих для этого случаях решайте задачи универсальным «способом системы уравнений». Он значительно облегчает работу;
- Разберитесь и используйте показанное в задании B13.8 «Правило». Его грамотное применение позволяет решать некоторые задачи буквально в одну строчку. «Обычное» же их решение сопряжено с долгими и громоздкими вычислениями, которые посильны далеко не всем;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

Обязательное условие для их правильного понимания и успешного решения – это, как и во многих других заданиях, составление самого обыкновенного рисунка!

Успешного вам рисования ☺!

И, по сложившейся традиции, законспектируем задание B13 очередной картинкой.


основания фигур
конус
пирамиды
«усеченные» фигуры
$V = \frac{1}{3} S_{осн} H$
«Правило»:
$S \sim a^2$
$V \sim a^3$
полезные приемы
B13
помнить
$S_{треуг} = \frac{1}{2} ah$
$S_{прям} = ah$
$S_{окр} = \pi r^2$
$C_{окр} = 2\pi r$
т. Пифагора
Фигура №1 (1)
Фигура №2 (2)
«неусеченные» фигуры
$V = S_{осн} H$
цилиндр
призмы
шар
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
$S = 4\pi r^2$
основания фигур