## Об изучении вероятностно-статистической линии в курсе математики

В ходе международных исследований TIMSS и PISA были выявлены существенные недостатки математической подготовки школьников России, которые подтверждаются и мониторингом образовательных достижений школьников. Характерные тенденции – это неумение анализировать и интерпретировать количественную информацию, представленную в различной форме (таблиц, диаграмм, графиков реальных зависимостей); неумение применять собственный опыт или знания из других областей в ситуациях, приближенных к реальной жизни, недостаточное развитие пространственных геометрических и вероятностных представлений. Отсутствие соответствующих умений привело к снижению уровня образовательных достижений по математике выпускников 9 классов. Об этом свидетельствуют результаты государственной итоговой аттестации по математике.

Весь современный комплекс социально-экономических наук (химия, биология) построены и развиваются на вероятностно-статистической базе. Без соответствующей подготовки невозможно полноценное изучение этих дисциплин в средней школе.

Необходимость развития у всех школьников вероятностной интуиции и статистического мышления стала насущной задачей обучения математике в основной школе. Именно вероятностно-статистическая линия, изучение которой невозможно без опоры на процессы, происходящие в окружающем мире, на реальный опыт школьника, способствует повышению математической грамотности.

**1. Выполнение требований стандарта и рекомендаций примерных программ**

Изучение элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в основной и старшей школе стало обязательным после утверждения федерального компонента государственного образовательного стандарта 2004 года и базисного учебного плана 2004 года. Конкретизация содержания этого раздела, и примерное распределение учебных часов приведены в примерных программах по математике.

На практике преподавание данного раздела зачастую не отвечает требованиям стандарта. Причин здесь несколько:

1) До сих пор нет однозначного подхода к преподаванию вероятностно-статистической линии в общеобразовательной школе. Авторы учебников излагают учебный материал по-разному. Содержание и формулировки тем в некоторых УМК не соответствует действующему стандарту. Например, такое несоответствие есть в учебнике «Математика» А. Г. Мордковича (10-11класс) 2009 года издания.

2) Существует серьезное расхождение в количестве часов, рекомендуемых на изучение вероятностно-статистической линии между примерной программой и авторскими тематическими планами, что влияет на качество усвоения материала. Тематическое планирование к выше названному учебнику «Математика» А.Г. Мордковича серьезно расходится по количеству часов, отводимых на изучение стохастики, с примерной программой.

3) До последнего времени при проведении итоговой аттестации обучающихся задания по разделу «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» отсутствовали в КИМах, поэтому на практике изучение данного учебного материала проводилось по остаточному принципу. В 2010 году задачи вероятностно-статистической линии были включены в экспериментальном порядке в КИМы Государственной итоговой аттестации за курс математики в 9 классе. Анализ результатов ГИА и репетиционных экзаменационных испытаний показал, что по сравнению с другими практико-ориентированными заданиями по темам, подвергнутым контролю, задания этого раздела были выполняются обучающимися хуже всего. Необходимо отметить, что в 2011 году проверка подготовки обучающихся по вероятностно-статистической линии входит в качестве обязательного экзаменационного материала за курс основной школы. В кодификаторе требований к уровню подготовки выпускников по математике в 2012 году указано, что выпускник должен уметь:

* работать со статистической информацией;
* находить частоту и вероятность случайных событий;
* решать комбинаторные задачи;
* сравнивать шансы, оценивать вероятность.

Начиная с 2012 года, материал основной демоверсии ЕГЭ был дополнен разделом «Элементы теории вероятностей и статистики» (спецификация, кодификатор).

Обращаем внимание, что учебный материал по изучению вероятностно-статистической линии включен в программы по математике 5-11 классов. Необходимо отметить, что на старшей ступени общего образования содержание и объем изучаемого материала зависит от выбора базового или профильного уровня изучения математики.

При разработке рабочих программ важно обратить внимание на соответствие содержания изучаемого учебного материала содержательным компонентам действующего стандарта. Рекомендуется придерживаться объемов времени для изучения этого раздела, указанных в примерных программах по математике. В программе перечисляются содержательные компоненты действующего стандарта по математике на ступенях основного общего образования для реализации раздела «Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей» и на ступени среднего (полного) общего образования для реализации раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» на базовом и профильном уровне; указаны требования к уровню подготовки выпускников, объемы учебных часов на изучение вероятностно-статистической линии.

Включение задач вероятностно-статистической линии в КИМы, ГИА и ЕГЭ за курс основной и средней школы актуализирует регулярное изучение данного раздела (на протяжении всего курса математики), организацию и пристальный контроль этого изучения со стороны методических служб и администраций образовательных учреждений.

**2. Общий подход к преподаванию вероятностно-статистической линии**

При разработке общего подхода к преподаванию вероятностно-статистической линии в школе необходимо руководствоваться следующими положениями:

* содержание материала, обязательно изучаемого в рамках данной линии в средней школе, определяется требованиями государственного стандарта по математике;
* в результате изучения вероятностно-статистической линии должно быть сформировано законченное элементарное представление о теории вероятностей и статистике и их тесной взаимосвязи;
* изучение стохастической линии целесообразнее начинать со статистического материала и излагать весь последующий материал индуктивно;
* необходимо рассмотреть различные определения вероятности: классическое, статистическое и геометрическое; при введении каждого из определений необходимо обращать внимание обучающихся на его недостатки и области возможного применения;
* необходимо подчеркивать тесную связь вероятностно-статистической линии разделов математики с окружающим миром как на стадии введения математических понятий, так и на стадии использования полученных результатов;
* разумно избегать излишнего математического формализма;
* иллюстрировать материал яркими, доступными и запоминающимися примерами, особо выделяя среди них задачи практического характера, устанавливающие взаимосвязь изучаемых фактов и явлений с жизнью, опытом обучающихся, стараться не использовать утратившие свою актуальность для общества примеры и задачи, в том числе задачи, связанные с азартными играми.

В результате обучения стохастике в школе должна быть сформирована вероятностная составляющая образовательной компетентности, которая предполагает, в частности:

* способность применять классическую, статистическую и геометрическую

модели вероятности при решении прикладных и практических задач;

* умение прогнозировать наступление событий на основе вероятностно-

статистических методов;

* использовать полученные умения для решения задач в смежных дисциплинах.

**3. Рекомендуемая последовательность изучения материала и распределение часов**

Образовательным учреждениям рекомендовано введение стохастической линии в 5-6 классах. Учебники по математике, начиная с 2006 года издания, содержат данный материал. В работе можно также использовать пособия, содержащие методические рекомендации по организации учебного процесса и примерное планирование. Следует учитывать, что в современных УМК существуют два подхода к реализации этого учебного материала: так называемый «классический» и «статистический (частотный)». К примеру, УМК А. Г. Мордковича реализуют первый из выше названных, а УМК Г. В. Дорофеева второй подходы. Оба подхода имеют право на существование. Однако введение первоначального понятия вероятности на основе статистических наблюдений над реальными экспериментами позволяет начать знакомство с элементами теории вероятностей на интуитивном уровне, не делая основного упора на комбинаторику, что существенно расширяет круг задач и вопросов, доступных для рассмотрения, связывает базовые понятия теории вероятности с их действительным использованием на практике.

Более предпочтительна следующая последовательность изучения понятия вероятности: ввести и сформировать представление о статистической вероятности, отмечая неудобство использования такого определения и его явную неточность, перейти к изучению классической вероятности и в завершении рассмотреть геометрическую вероятность как способ решения проблемы конечности числа исходов в классической вероятностной схеме. Такая последовательность изучения не соответствует историческому развитию науки, но помогает избежать типичных ошибок и неверных представлений о вероятности.

Рекомендуем распределить изучаемый материал вероятностно-статистического раздела по классам следующим образом:

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Основное общее образование*  «Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей» | | |
| Класс | Объем времени (в часах) | Содержание |
| 5 | Не менее 4 | Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков |
| 6 | 8 – 10 | Сбор и группировка статистических данных; наглядное представление статистической информации (представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков); понятие о случайном опыте и событии; достоверное и невозможное события; сравнение шансов; решение комбинаторных задач перебором вариантов; множество (элемент множества, подмножество, диаграммы Эйлера); операции над множествами |
| 7 | 9-11 | Статистические характеристики набора данных; понятие о статистическом выводе на основе выборки; понятие и примеры случайных событий; частота случайного события; комбинаторика (перебор вариантов; решение комбинаторных задач путем систематического перебора возможных вариантов) |
| 8 | 8-10 | Множество (элемент множества, подмножество, диаграммы Эйлера); операции над множествами; комбинаторика (перебор вариантов; правило суммы, умножения, решение комбинаторных задач путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правил суммы и умножения); частота и вероятность; равновозможные события и подсчет их вероятности |
| 9 | 12-15 | Комбинаторные задачи; перестановки, размещения, сочетания; вероятность случайных событий (вычисление частоты события с использованием собственных наблюдений и готовых статистических данных); классическое определение вероятности; нахождение вероятности случайных событий в простейших случаях; геометрическая вероятность |
| *Среднее (полное) общее образование базовый уровень*  «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» | | |
| 10 | 12-15 | Комбинаторика (перестановки, размещения, сочетания); комбинаторное правило умножения, бином Ньютона; треугольник Паскаля; вероятность; статистическая вероятность; классическое определение вероятности; элементарные и сложные события; сумма и произведение случайных событий; вероятность суммы и произведения случайных событий; вероятность противоположного события; геометрическая вероятность |
| 11 | 10 | комбинаторные задачи; вероятность и статистическая частота наступления события;решение практических задач с применением вероятностных методов |

**4. Выбор учебников и использование электронных образовательных ресурсов (ЭОР)**

Об особенностях учебников, реализующих изучение вероятностно-статистической линии, и методических рекомендаций к ним можно прочитать в статьях, представленных в приложении 4.

Выбор учебников и пособий для преподавания предмета «Математика» необходимо производить в соответствии с Федеральным перечнем учебников на текущий учебный год. Не допускается использование устаревших учебников, а также пособий, не получивших грифа Министерства образования и науки. При выборе учебников следует обратить внимание на наличие раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей».

Для повышения эффективности образовательного процесса по математике целесообразно использование средств информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), особенно при организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся.

Рекомендуется более широкое применение цифровых образовательных ресурсов (ЦОР), электронных учебников и ресурсов дистанционного обучения, в том числе электронных образовательных ресурсов. Примеры инновационных учебных материалов приведены в приложении .

**5. Содержательные компоненты стандарта по математике, реализующие вероятностно-статистическую линию, и требования к уровню подготовки выпускников (основное общее образование)**

**ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ, КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**ОСНОВНОЕ ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

***Доказательство.*** *Определения, доказательства, аксиомы и теоремы; следствия. Необходимые и достаточные условия. Контрпример. Доказательство от противного. Прямая и обратная теоремы. Понятие об аксиоматике и аксиоматическом построении геометрии. Пятый постулат Эвклида и его история.*

***Множества и комбинаторика.*** *Множество. Элемент множества, подмножество. Объединение и пересечение множеств. Диаграммы Эйлера.Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения.*

***Статистические данные.*** *Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Средние результатов измерений. Понятие о статистическом выводе на основе выборки. Понятие и примеры случайных событий.*

***Вероятность.*** *Частота события, вероятность. Равновозможные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.*

**ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКОВ**

***В результате изучения математики ученик должен***

**знать/понимать**

* вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира; примеры статистических закономерностей и выводов;

**уметь**

* проводить несложные доказательства, получать простейшие следствия из известных или ранее полученных утверждений, оценивать логическую правильность рассуждений, использовать примеры для иллюстрации и контрпримеры для опровержения утверждений;
* извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; составлять таблицы, строить диаграммы и графики;
* решать комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения;
* вычислять средние значения результатов измерений;
* находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные;
* находить вероятности случайных событий в простейших случаях;

*использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни**для:*

* выстраивания аргументации при доказательстве (в форме монолога и диалога);
* распознавания логически некорректных рассуждений;
* записи математических утверждений, доказательств;
* анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, таблиц;
* решения практических задач в повседневной и профессиональной деятельности с использованием действий с числами, процентов, длин, площадей, объемов, времени, скорости;
* решения учебных и практических задач, требующих систематического перебора вариантов;
* сравнения шансов наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией;
* понимания статистических утверждений.

**СРЕДНЕЕ (ПОЛНОЕ) ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

##### Базовый уровень

*Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.*

*Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.*

*Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события.*

*Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события. Решение практических задач с применением вероятностных методов.*

***В результате изучения ученик должен уметь***

* решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
* вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

*использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:*

* анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;
* анализа информации статистического характера.

##### Профильный уровень

*Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.*

*Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.*

*Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события.*

***В результате изучения ученик должен уметь***

* решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул, треугольника Паскаля; вычислять коэффициенты бинома Ньютона по формуле и с использованием треугольника Паскаля;
* вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов (простейшие случаи);

*использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:*

* анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков; анализа информации статистического характера

**Распределение учебных часов на изучение вероятностно-статистической линии в примерных программах основного общего и среднего (полного) общего образования**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Основное общее образование*** | Кол-во часов для 5 – 9 кл. |
| Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей | 45 |
| ***Среднее (полное) общее образование*** | Кол-во часов для 10 – 11 кл. |
| Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (базовый уровень) | 25 |
| Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (профильный уровень) | 20 |

Приложение

**Список статей об учебных пособиях, реализующих изучение**

**вероятностно-статистической линии**

* Бунимович, Е. А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики // Математика в школе. – №4. – 2002.
* Изучение теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики. Программа для курсов повышения квалификации учителей / В. А. Булычев, Е. А. Бунимович // Математика в школе. – №4. – 2003.
* Бунимович, Е.А., Суворова, С. Б. Методические указания к теме «Статистические исследования» // Математика в школе. – №3. – 2003.
* Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Элементы комбинаторики в школьном курсе алгебры // Математика в школе. – №6. – 2004.
* Макарычев, Ю. Н., Миндюк, Н. Начальные сведения из теории вероятностей в школьном курсе алгебры // Математика в школе. – №7. – 2004.
* Мордкович, А. Г., Семенов, П. В. События, вероятности, статистическая обработка данных // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – №34, 35, 41, 43, 44, 48, 2002, №11, 17, 2003.
* Селютин, В. Д. О формировании первоначальных стохастических представлений // Математика в школе. – №3. – 2003.
* Селютин, В. Д. О подготовке учителей к обучению школьников стохастике // Математика в школе. – №4. – 2003.
* Студенецкая, В. Н., Фадеева, О. М. Статистика и теория вероятностей на пороге основной школы // Математика в школе. – №6. – 2004.
* Студенецкая, В. Н., Фадеева, О. М. Новое пособие по теории вероятностей для основной школы // Математика в школе. – №7. – 2004.
* Ткачева, М. В., Федорова, Н. Е. Элементы статистики в курсе математики 7-9 классов основной школы // Математика в школе. – №3. – 2003.
* Ткачева, М. В. Анализ данных в учебниках Н. Я. Виленкина и других // Математика в школе. – №5. – 2003.
* Тюрин, Ю. Н., Макаров, А. А., Высоцкий, И. Р., Ященко, И. В. Теория вероятностей и статистика: методическое пособие для учителя.